Nombres complexes.

Forme algébrique :

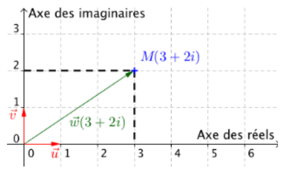
$z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. $Re(z) = a$; $Im(z) = b$

♦ $b = 0 \Leftrightarrow z$ est un nombre réel. ♦ $a = 0 \Leftrightarrow z$ est un nombre imaginaire pur.

Prop : Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Affixe :

$z = a + ib$ est l'affixe de $M(a; b)$ et de $\vec{u}(a; b)$



Conjugué : $z = a + ib$: $\bar{z} = a - ib$

♦ $\bar{\bar{z}} = z$ ♦ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ♦ $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$ ♦ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ ♦ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

♦ $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. ♦ $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$. ♦ $z\bar{z} = a^2 + b^2$

Equations du second degré dans C : $(E): az^2 + bz + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$

♦ Si $\Delta > 0$, (E) a 2 solutions réelles : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

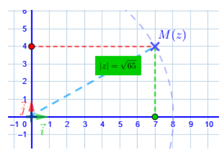
♦ Si $\Delta = 0$, (E) a 1 solution réelle : $z_1 = \frac{-b}{2a}$

♦ Si $\Delta > 0$, (E) a 2 solutions complexes non réelles : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Module et argument :

$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ♦ $|z|^2 = z\bar{z}$

♦ $|z| = |\bar{z}|$ ♦ $|z| = |-z|$ ♦ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

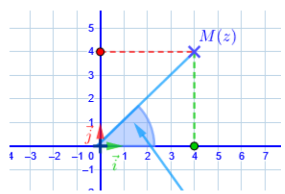


Argument :

$\arg(z) = \left(\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$

♦ $arg(\bar{z}) = -arg(z)$ ♦ $arg(-z) = \pi + arg(z)$

♦ $arg(z) = k\pi \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. ♦ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

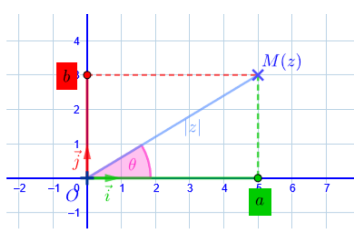


Forme trigonométrique :

$z = a + ib$ $\theta = arg(z)$

♦ $a = |z|cos(\theta)$ ♦ $b = |z|sin(\theta)$

$z = |z|(cos(\theta) + i\sin(\theta))$



Prop :

☺ $|zz'| = |z||z'|$ ☺ $|z^n| = |z|^n$ ☺ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

☺ $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$ ☺ $arg(z^n) = n\,arg(z)$ ☺ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$

Forme exponentielle :

$e^{i\theta} = cos(\theta) + i\sin(\theta)$; $e^{i\pi} = -1$

$z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$

Prop :

♦ $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ ♦ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ ♦ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ♦ $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

Géométrie et nombre complexes :

☺ $(\vec{i}; \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$ ☺ $AB = |z_B - z_A|$ ☺ $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Ensembles de points :

- $|z - z_A| = r$: cercle de centre A et de rayon r.
- $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de [AB].
- $\arg(z) = 0\,[\pi]$: axe de réels.
- $\arg(z) = 0\,[2\pi]$: demi-axe de réels positifs.
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$: axe des imaginaires purs.
- $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$: demi droite y=x, x>0