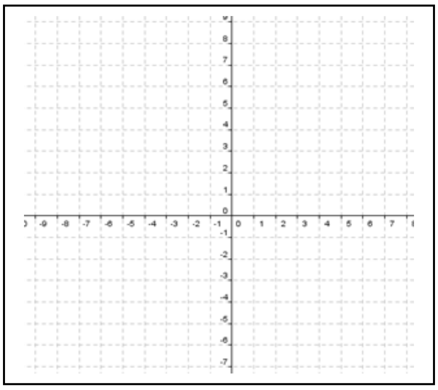
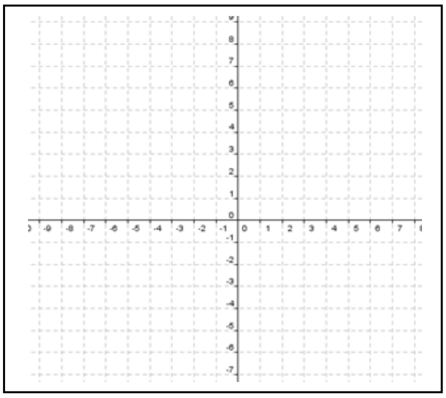
Continuité.

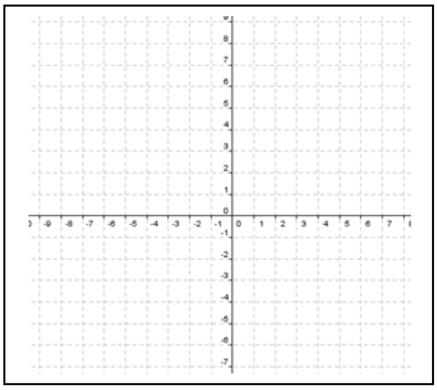
I.Notion de continuité.

On peut définir mathématiquement la notion de continuité d'une fonction mais cette définition relativement compliquée n'est pas au programme. Graphiquement, on peut reconnaître une fonction continue sur un intervalle I par le fait que le tracé de la courbe représentative de f peut se faire sans lever le crayon de la feuille.

Exemples :







……………………………………………… ……………………………………………… ………………………………………………
……………………………………………… ……………………………………………… ………………………………………………
……………………………………………… ……………………………………………… ………………………………………………

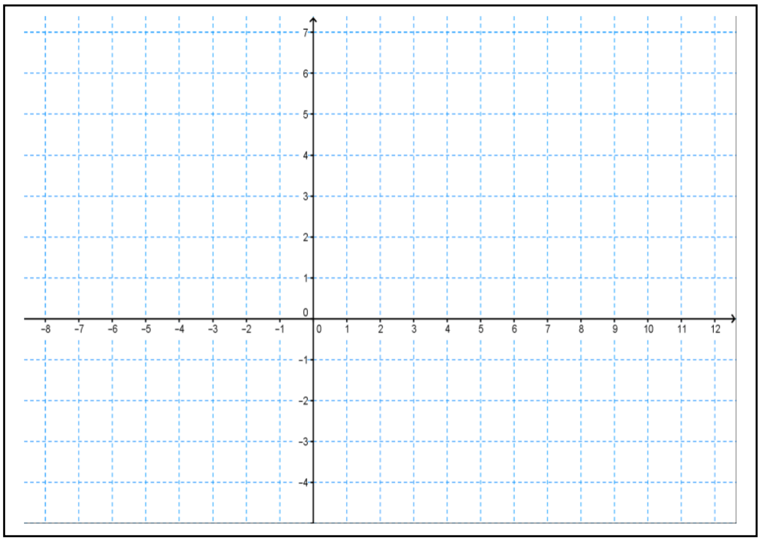
Propriété (admise)

- Les fonctions polynômes sont continues sur IR.
- La fonction racine carrée est continue sur [0 ; + ∞ [.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

Remarque : La fonction inverse n'est pas continue sur son ensemble de définition, mais elle est continue sur chacun des intervalles] 0 ; + ∞ [et] - ∞ ; 0 [.

☑*Savoir faire : Savoir reconnaitre graphiquement une fonction continue :*

On considère la fonction f définie sur I; R par : $\begin{cases} f(x) = x + 5 \ si\ x < -2 \\ f(x) = -x \quad si\ -2 \leq x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ si\ 0 < x \end{cases}$



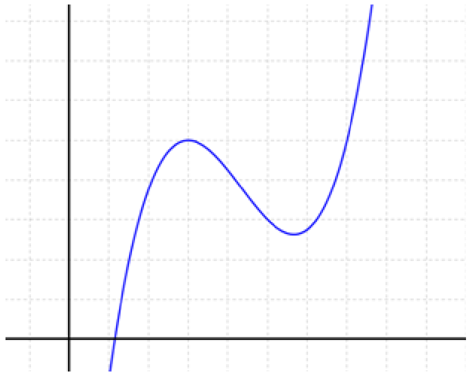
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………

Convention
Il est convenu que, dans un tableau de variation de fonction, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

Propriété (admise)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

II. Théorème des valeurs intermédiaires.



Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

....
....
....

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)= k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation de la forme $f(x)= k$:*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 25$.

Montrer que l'équation (E) : $f(x)= -1$ *admet au moins une solution sur [1 ; 5].*

....
....
....
....

Remarque 1 :
La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle du théorème. Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre f(a) et f(b), il n'existe aucun réel c compris entre a et b tel que f(c) = k.

Théorème des valeurs intermédiaires et solution unique

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)= k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'une unique solution d'une équation de la forme $f(x)= k$:*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 + x$.

Montrer que l'équation (E) : $f(x)= 5$ admet une unique solution sur [1 ; 2].

....
....
....
....
....
....
....

Remarque :

- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$, sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'une unique solution sur un intervalle non borné :*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Etablir le tableau de variations de f définie sur IR.

....

x	
Variations de f	

2) Montrer que 1 est une solution de l'équation (E) : $f(x)= 0$.

....

3) Montrer que l'équation (E) : $f(x)= 0$ admet une unique solution α sur [2 ; +∞[.

....

3) Montrer que l'équation (E) : $f(x)= 0$ admet une unique solution β sur] -∞ ; 0 [.

....

4) En déduire le tableau de signes de $f(x)$.

x	
Signes de $f(x)$	

☑*Savoir faire : Savoir utiliser la calculatrice pour donner un encadrement d'une solution :*

4) Déterminer un encadrement de α et de β à 10^{-2} près.

A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Avec un pas égal à 1

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre …. et …..

…… < α < ……

Avec un pas égal à 0,1

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre …. et …..

…… < α < ……

Avec un pas égal à 0,01

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre …. et …..

…… < α < ……

De même pour β, on trouve …… < β < ………

☑*Savoir faire : Savoir utiliser un algorithme pour donner un encadrement d'une solution :*