Fonctions convexes.

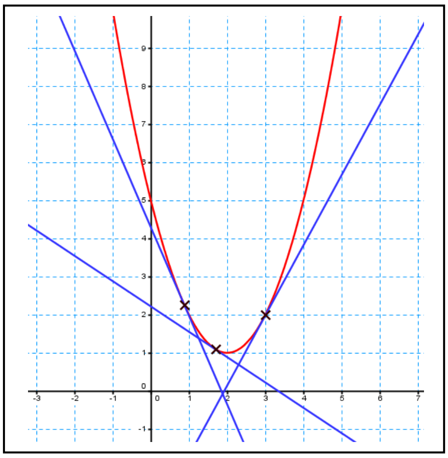
I. Fonctions convexes et fonctions concaves.

Définition

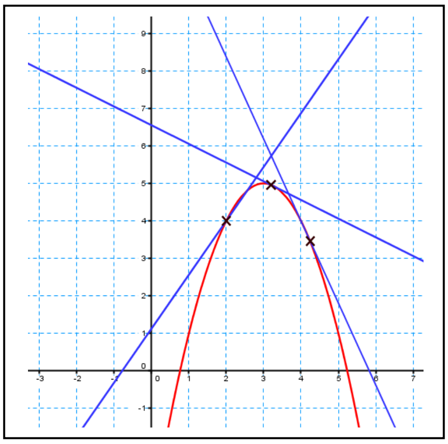
Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

♦ La fonction f est <u>convexe</u> sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

♦ La fonction f est <u>concave</u> sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

☑ *<u>Savoir faire : Savoir définir la convexité des fonctions de référence :</u>*

- La fonction carré est .... sur......................
- La fonction cube est......................sur .... et .... sur ....
- La fonction inverse est......................sur .... et .... sur ....
- La fonction racine carrée est......................sur .... et .... sur ....

II. Convexité et fonction dérivée.

Propriété

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

♦ La fonction f est convexe sur I si sa dérivée f' est croissante sur I.

♦ La fonction f est concave sur I si sa dérivée f' est décroissante sur I.

Remarque : On appelle dérivée seconde d'une fonction la dérivée de sa dérivée, on la note f''(x). On peut traduire la propriété avec le signe de la dérivée seconde.

Propriété

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, si la dérivée seconde f'' existe sur I alors :

♦ La fonction f est convexe sur I si sa dérivée seconde f'' est ....sur I.

♦ La fonction f est concave sur I si sa dérivée seconde f'' est ....sur I.

☑*Savoir faire : Savoir étudier la convexité d'une fonction :*

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Montrer que f est convexe sur *IR*.

....

....

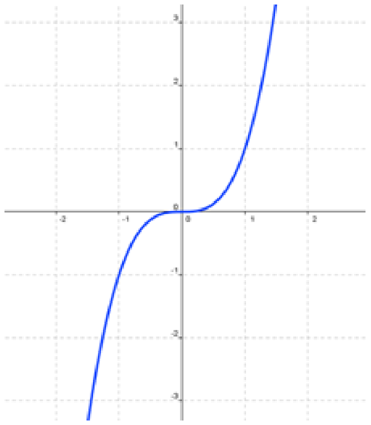
....

....

....

....

III. Point d'inflexion.



L'origine du repère est un point d'inflexion de la fonction cube.

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente.

Remarque importante :
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Définition

Soit une fonction f définie sur]a ; b[, telle que la dérivée seconde f'' existe sur]a ; b[, alors si f'' s'annule en c en changeant de signe, alors le point A(c, f(c)) est un point d'inflexion de la courbe.

Attention, f ''(c) =0 n'implique pas en général que A soit un point d'inflexion.

☑*Savoir faire : Savoir trouver un point d'inflexion:*

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Montrer que f admet un point d'inflexion.

....

....

....

....

....

....

....

....

☑ *Baccalauréat ES Centres Etrangers juin 2013 :*

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 8] par : $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que pour tout réel de l'intervalle [2 ; 8], on a : $f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$.

....

....

....

....

....
....
....
....

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [2 ; 8].

....
....
....
....
....
....

x	

b. En déduire le tableau de variations de *f* sur l'intervalle [2;8].

....
....
....
....
....

x	

c. (question rajoutée) Prouver que l'équation f(x) = 0,2 admet une unique solution α appartenant à [2 ; 3,2]. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

....
....
....
....

3. On appelle *f ''* la dérivée seconde de *f* sur [2 ; 8].

On admet que, pour tout réel *x* de l'intervalle [2 ; 8], on a : $f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$.

a. Montrer que *f* est une fonction convexe sur [4,8 ; 8].

....
....
....
....
....

x	

b. Montrer que le point de (*C*) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

....
....

4. On considère la fonction *F* définie sur [2 ; 8] par : $F(x) = -x + 10\ln x + \frac{16}{x}$.

a. Montrer que *F* est une primitive de *f* sur [2 ; 8].

....
....
....

b. Calculer $I = \int_2^8 f(x)dx$

....
....
....