Devoir de mathématiques n°3.

Exercice I QCM.

1°) $1,2 \times 1,15 = 1,38$. Le coefficient multiplicateur associé aux augmentations successives est donc 1,38 cela représente une augmentation de 38%.

2°) $S_n = 1 + 0,75 + 0,75^2 + \dots + 0,75^n = \dfrac{1-0,75^{n+1}}{1-0,75} = \dfrac{1-0,75^{n+1}}{0,25}$

Donc $S_n = 4(1-0,75^{n+1})$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^{n+1} = 0$ car $0 < 0,75 < 1$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 4$.

3°) f est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$.

Donc f' est positive sur $]-\infty;0[$ et négative sur $]0;+\infty[$ avec $f'(0)=0$. Donc la représentation graphique de f' est la courbe C_2.

4°) $f(2) = 4$ Donc la tangente passe par $A(2;4)$. cela est suffisant pour dire que son équation est $y = -3x+10$.

Remarque : $f'(x) = \dfrac{1\times(x-1) - 1\times(x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. donc $f'(2) = -3$

Donc le coefficient directeur de la tangente est -3.

Exercice II : Suites.

1°) En 2011 il y aura $0,7 \times 600 + 210 = 630$ abonnés.

En 2012 il y aura $0,7 \times 630 + 210 = 651$ abonnés

2°) $B_3 = 0,7 \times B_2 + 210$.

3°) $V_n = U_n - 700$.

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 700 = 0,7U_n + 210 - 700 = 0,7U_n - 490 = 0,7(U_n - 700) = 0,7V$

Donc $V_{n+1} = 0,7V_n$, $\forall n$, Donc la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $V_0 = U_0 - 700 = 600 - 700 = -100$.

b) $U_n = V_n + 700$. or $V_n = -100 \times (0,7)^n$ $\forall n$

Donc $U_n = 700 - 100 \times (0,7)^n$ $\forall n$,

4. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$ car $0 < 0,7 < 1$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -100 \times 0,7^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 700 - 100 \times (0,7)^n = 700$.

b) $U_n > 697 \Leftrightarrow 700 - 100 \times 0,7^n > 697$

$\Leftrightarrow -100 \times 0,7^n > -3$

$\Leftrightarrow 0,7^n < \frac{-3}{-100}$

$\Leftrightarrow 0,7^n < 0,03.$

c) la valeur affichée après avoir fait tourner l'algorithme est 10.

d) le nombre d'abonnés atteindra 697 en $2010 + 10 = 2020$.

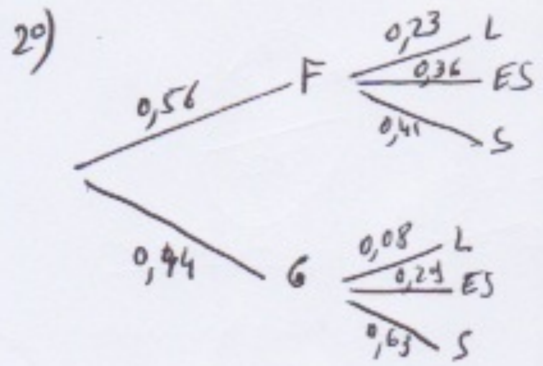
Remarque : $(u_{10} = 700 - 100 \times 0,7^{10} \simeq 697)$

Exercice III : Probabilités.

1°) a) $P_G(L) = \frac{11080}{138617} \simeq 0,08.$

b) $P(S) = \frac{71765 + 87031}{176169 + 138617} \simeq 0,5$

2°)



3°) a) F et G constituent une partition de l'univers

D'après la loi des probabilités totales

$P(ES) = P(F \cap ES) + P(G \cap ES)$

Donc $P(ES) = P(F) \times P_F(ES) + P(G) \times P_G(ES)$

Donc $P(ES) = 0,56 \times 0,36 + 0,44 \times 0,29$

Donc $P(ES) \simeq 0,3292.$

Donc $P(ES) \simeq 0,33.$

b) $P_{ES}(F) = \frac{P(F \cap ES)}{P(ES)} = \frac{0,56 \times 0,36}{0,33} \simeq 0,36$

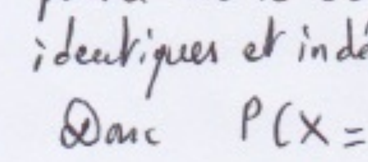
4°) Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'élèves en ES parmi les 10 élèves. Les choix étant assimilés à des tirages identiques et indépendant X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,33)$.

Donc $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,33^3 \times (1 - 0,33)^{10-3} \simeq 0,26.$

Exercice IV : fonction.

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1°)



La fonction à l'air convexe sur $]-\infty ; 0[$ et concave sur $]0 ; +\infty[$.

elle semble avoir 1 point d'inflexion en 0.

2°) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2+1$

Donc $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$

Donc $f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - 2x \times x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

3°)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

On pose $(E) : -x^2+1 = 0$

$(E) \Leftrightarrow x^2 = 1$

$S(E) = \{-1 ; 1\}$.

$(x^2+1)^2$ est toujours positif donc $f'(x)$ est du même signe que $-x^2+1$.

4°) $f(-1) = -\frac{1}{2}$; $f(1) = \frac{1}{2}$

5°) a) $f(-1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ Donc $0{,}2 \in [f(-1) ; f(1)]$. De plus f est continue et strictement croissante sur $[-1 ; 1]$ donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires l'équation $(E) : f(x) = 0{,}2$ admet une unique solution α appartenant à $[-1 ; 1]$.

b) Avec la calculatrice on trouve $0{,}2 < \alpha < 0{,}21$.

c) $(E) : f(x) = 0{,}2$.

$(E) \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0{,}2$

$(E) \Leftrightarrow x = 0{,}2x^2 + 0{,}2$

$(E) \Leftrightarrow 0{,}2x^2 - x + 0{,}2 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}84$

$\Delta > 0$ Donc l'équation (E) a 2 solutions :

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{0{,}84}}{0{,}04} \approx 4{,}79$

$x_2 = \frac{1 - \sqrt{0{,}84}}{0{,}04} \approx 0{,}208$

Un seule appartient à $[-1 ; 1]$ Donc $\alpha = x_2 = \frac{1 - \sqrt{0{,}84}}{0{,}04}$

6°) $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$(x^2+1)^3$ est positif pour tout nombre réel x, donc $f''(x)$ est du même signe que $2x(x^2-3)$.

On pose (E_1) : $2x = 0$. $S(E_1) = \{0\}$.
On pose (E_2) : $(x^2-3) = 0$ $S(E_2) = \{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signes de $2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signes de x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signes de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Donc f est concave sur $]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]0;\sqrt{3}[$
et convexe sur $]-\sqrt{3};0[\cup]\sqrt{3};+\infty[$.
Elle admet 3 points d'inflexions en $-\sqrt{3}$; 0 et $\sqrt{3}$.
Remarque : en étant plus attentif et en zoomant sur la calculatrice, on voit en effet que la courbe semble changer de convexité en $-\sqrt{3}$ et en $\sqrt{3}$.