Correction du devoir n°1.

Exercice I :

1°) $u_{n+1} = u_n + 8$

2°) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $u_0 = 300$

3°) pour tout n, $u_n = 8 \times n + 300$.

4°) $u_{36} = 8 \times 36 + 300 = 588$

Après 3 ans, la somme obtenue sera de 588 €.

Exercice II

1°) $u_{n+1} = 1{,}02 \times u_n$.

2°) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme $u_0 = 300$.

3°) $u_n = (1{,}02)^n \times 300$.

4°) $u_{36} = (1{,}02)^{36} \times 300 = 611{,}96$.

Après 3 ans, la somme obtenue sera de 612 € (arrondi à 1 euro près)

Remarque : En comparaison du 1er exercice, le deuxième placement est plus intéressant.

Exercice III :

1°) $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^7$

Donc $S = \dfrac{1-2^8}{1-2} = 255$.

2°) (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de 1er terme 10000

Donc pour tout n, $u_n = 10\,000 \times 0{,}9^n$.

3°) Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n). La somme investie après 1 an est donc

$S_{12} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{12}$.

$S_{12} = 10\,000 + 10\,000 \times 0{,}9 + 10\,000 \times (0{,}9)^2 + \cdots + 10\,000 \times (0{,}9)^{12}$

Donc $S_{12} = 10\,000 \times (1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + \cdots + 0{,}9^{12}) = 10000 \times \dfrac{1-0{,}9^{13}}{1-0{,}9} \approx 74\,581$ €

Exercice IV :

a) $u_{n+1}-u_n=\left[2+(n+1)^2\right]-\left[2-n^2\right]=2+n^2+2n+1-2-n^2=2n+1$

$n\geqslant 0$ Donc pour tout n, $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$

Donc pour tout n, $u_{n+1}>u_n$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) $u_n=3\times 2^n$

* méthode n°1 : On reconnait le terme d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 3. Sa raison est >1 et son premier terme est >0 donc elle est croissante.

* méthode n°2 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\cancel{3}\times 2^{n+1}}{\cancel{3}\times 2^n}=2^{n+1-n}=2$.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ et comme $u_n>0$ $u_{n+1}>u_n$ pour tout n,

Donc la suite (u_n) est croissante.

* méthode n°3 : $u_{n+1}-u_n=3\times 2^{n+1}-3\times 2^n=3\times 2^n(2-1)=3\times 2^n$

Donc $u_{n+1}-u_n>0$ pour tout n, donc $u_{n+1}>v_n$ pour tout n,

Donc (u_n) est croissante.

Exercice V :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ car $0<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ car $2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}3\times 2^n=+\infty$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,9)^n=0$ car $0<0,9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}5\times 0,9^n=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}5\times 0,9^n+100=100$.

Exercice VI :

1) $u_1=0,875\times u_0+1200=0,875\times 40\,000+1200=36\,200$ (réponse c)

2°) $V_{n+1}=u_{n+1}-9600=0,875\,u_n-9600+1200=0,875\times u_n-8400$

Donc $V_{n+1}=0,875\times\left(u_n-\dfrac{8400}{0,875}\right)=0,875\times(u_n-9600)=0,875\,V_n$

Donc $V_{n+1}=0,875\times V_n$ pour tout n, donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,875 et de 1er terme $V_0 = U_0 - 9600 = 30400$

(réponse b).

3°) Suite à la question n°2 on a donc pour tout n, $V_n = 30400 \times 0{,}875^n$

or $V_n = U_n - 9600$ donc $U_n = V_n + 9600$ donc $U_n = 30400 \times 0{,}875^n + 9600$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}875^n = 0$ car $0 < 0{,}875 < 1$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 30400 \times 0{,}875^n = 0$

Donc $\lim 30400 \times 0{,}875^n + 9600 = 9600$ (réponse d).

4°) Cet algorithme permet d'avoir le plus petit rang n pour lequel $U_n \leq 10\,000$. (la boucle tant que va s'arrêter dès que U_n aura dépassé 10 000.). (réponse d).

5°) En faisant tourner l'algorithme on trouve 33. (réponse a).

Remarque : avec la formule du 3°), on trouve :

$U_{33} = 30400 \times 0{,}875^{33} + 9600 \approx 9970{,}8$.