Blaise Pascal (1623 – 1662) *mathématicien, physicien, inventeur et philosophe français pose les base de la réflexion sur les probabilités en résolvant le problème des partis du chevalier de Méré.*

I. Expérience aléatoire, évènements.

Définition : Une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues possibles et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

Expérience 1 : On lance une pièce et on observe la face supérieure
Expérience 2 : On lance un dé et on observe le chiffre de la face supérieure.
Expérience 3 : On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. .

Définition : L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'univers, et se note Ω.

Expérience 1 : $\Omega = \{$"Pile" ; "Face"$\}$ 2 issues possibles
Expérience 2 : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ 6 issues possibles.
Expérience 3 : $\Omega = \{$l'ensemble des 32 cartes$\}$, 32 issues possibles

Définition : Un évènement est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
Les événements élémentaires sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Expérience 2 : lancer de dé. Il y a 6 issues possibles
l'évenement : "obtenir un 6" est un événement élementaire
l'évènement : "Obtenir un nombre pair" n'est pas un évènement élémentaire, il est realisé par les issues $\{2 ; 4 ; 6\}$.

II. Probabilité d'un évènement.

On considère l'expérience aléatoire 1 et l'évènement E : « On obtient Pile ».
On répète 100 fois l'expérience et on calcule la fréquence avec laquelle l'évènement E s'est réalisé. $f = \frac{41}{100}$
On calcule la fréquence d'obtention de Pile pour tous les lancers de la classe. $f = 0{,}482$

plus on lance la pièce plus la fréquence se rapproche de 0,5. 0,5 est la fréquence théorique si on lance la pièce une infinité de fois, c'est la probabilité de l'évenement "obtenir Pile".

Définition : Les fréquences obtenues de réalisation d'un événement E se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expériences augmente (Loi des grands nombres).
Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement E. On la note $p(E)$.

Dans l'expérience du lancer de pièce, $P(E) = 0{,}5$

Propriété : La probabilité d'un événement E est un nombre compris entre 0 et 1. ($0 \leq p(E) \leq 1$)

une probabilité est une fréquence (théorique) donc un nombre compris entre 0 et 1. On peut l'écrire sous forme de fraction ou écriture décimale.

Un évènement est dit impossible lorsque sa probabilité est égale à 0.
Un évènement est dit certain lorsque sa probabilité est égale à 1

III. Loi de probabilités.

Définition : L'ensemble des probabilités des événements élémentaires d'une expérience aléatoire constitue ce qu'on appelle la loi de probabilité.

Dans une urne il y a 3 boules rouges, 5 bleues et 2 vertes.

3 issues possibles 10 boules en tout

$p(\text{"rouge"}) = \frac{3}{10}$ $p(\text{"bleue"}) = \frac{5}{10}$

$p(\text{"verte"}) = \frac{2}{10}$

Issues	"Rouge"	"bleue"	"verte"
probabilités	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$

Propriété : La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 $\left(\frac{3}{10} + \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = 1\right)$

Définition : Lorsque les probabilités des événements élémentaires sont égales, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité

IV. Calculs de probabilités.

Propriété : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

☑ *Savoir-faire : Savoir dénombrer pour calculer une probabilité :*

On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit E l'événement : « On tire un as ». Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?

il y a 32 issues possibles, il y a 4 as donc l'événement E est réalisé par 4 issues

$p(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser un tableau pour déterminer une probabilité :*

Dans une classe de 30 élèves, 18 pratiquent l'espagnol et 16 l'anglais. 2 élèves ne pratiquent aucune des deux. Détermine la probabilité qu'un élève choisit au hasard pratique l'anglais et l'espagnol.

On complète le tableau ci-contre, A = "les élèves qui font anglais"

$\bar{A}$ = "les élèves qui ne font pas anglais"

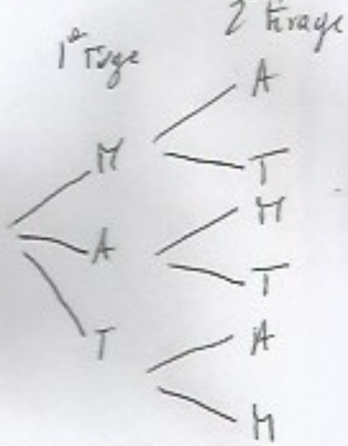
il y a 6 élèves qui font anglais et espagnol $p = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

	A	$\bar{A}$	
E	6	12	18
$\bar{E}$	10	2	12
	16	14	30

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser un arbre pour déterminer une probabilité :*

Dans un sac on dépose 3 cartes marquées par une des lettres M, A, T. On tire au hasard successivement et sans remise deux cartes du sac. On crée ainsi un mot de deux lettres.

1) Déterminer l'univers Ω des mots possibles.
2) Déterminer les probabilités des événements :
   A : « le mot contient la lettre A » et B : « le mot fini par T »

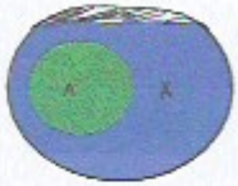


1°) les mots possibles sont {MA ; MT ; AM ; AT ; TA ; TM}

il y a 6 issues possibles

2°) $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

V. Évenements contraires.



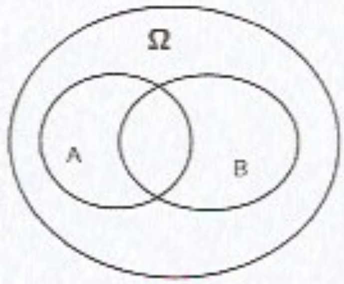
Définition : Deux évènements A et B sont dits complémentaires lorsque A est formé de tous les éléments de l'univers qui ne sont pas dans B. On dit aussi que B est l'évènement contraire de A et on le note $\bar{A}$.

Expérience 3 : l'évènement contraire de A : « on obtient un cœur » est B : « ne pas obtenir un cœur »

Propriété : Pour tout évènement E, on a : $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

$p(E) + p(\bar{E}) = 1$

VI. Intersection et union d'évènements.



Définition : Soit A et B deux évènements.

- L'intersection de A et de B est l'évènement composé des issues qui appartiennent à A et à B On le note $A \cap B$
- L'union de A et de B est l'évènement composé des issues qui appartiennent à A ou à B On le note $A \cup B$

Expérience 3 : A : « on obtient un cœur » et B « On obtient un roi »   32 cartes

$A \cap B$ obtenir le roi de cœur $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$

$A \cup B$ obtenir un roi ou un cœur $p(A \cup B) = \frac{11}{32} \Rightarrow$ (8 cœurs + 3 rois, roi de cœur déjà compté)

Propriété : Soient A et B, deux évènements d'une expérience aléatoire, alors
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

on revient sur l'exemple ci dessus $\Rightarrow$ $p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$ on retrouve $p(A \cup B)$

VII. Évènements incompatibles.

Définition :
Deux évènements A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun.

On dit aussi A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Propriété : Soient A et B, deux évènements incompatibles d'une expérience aléatoire, alors
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ $(p(A \cap B) = 0)$!

A : « on obtient un valet » B : « on obtient un roi » alors A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.