Loi de probabilité á densité.

I. Introduction, variable aléatoire discrète, continue.

1) Variable aléatoire discrète (rappel)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Il existe des variables aléatoires qui prennent n'importe quelle valeur dans un intervalle de IR.

2) Variable aléatoire continue

Exemple :

Une entreprise fabrique des disques durs. On définit une variable aléatoire qui, à chaque disque dur, associe sa durée de vie en heures. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier et peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle [0 ; +∞[. Une telle variable aléatoire est dite continue.

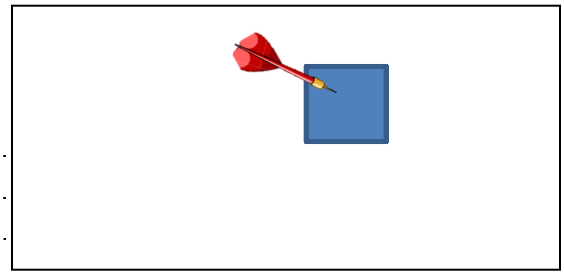
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3) Fonction à densité

Exemple :

On lance une fléchette sur une cible, on s'intéresse à la probabilité qu'elle touche le carré bleu.



……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Dans le cas d'une variable aléatoire continue qui prend pour valeurs les réels d'un intervalle I, sa loi de probabilité n'est pas associée à la probabilité de chacune de ses valeurs (comme dans le cas discret) mais à la probabilité de tout intervalle inclus dans I.

Définition

On appelle fonction de densité (ou densité) toute fonction *f* définie, continue et positive sur un intervalle *I* telle que l'intégrale de *f* sur I soit égale à 1.
Si X est une variable aléatoire continue sur I et $[a\,;b]$ un intervalle de I, la probabilité de l'événement $\{a \leq X \leq b\}$, est égale à l'aire sous la courbe *f* sur $[a\,;b]$, soit : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$.

Remarque :

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

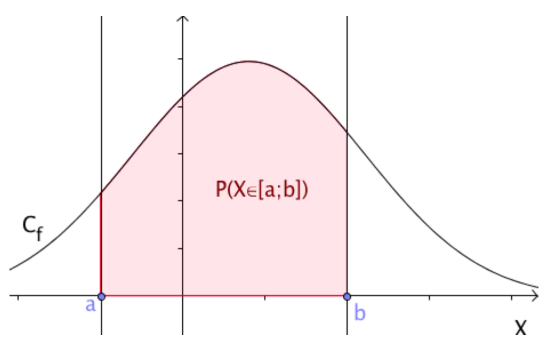
……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………



4) Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur un intervalle $[a\,;b]$.
L'espérance mathématique de X est le réel. $E(X) = \int_a^b t\, f(t)dt$.

☑Savoir-faire : Savoir utiliser une loi de densité :

Une entreprise produit des dalles en plâtre suivant une variable aléatoire continue *X*, en tonnes, qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 20] avec une densité de probabilité *f* définie par : $f(x) = 0{,}015x - 0{,}00075x^2$

a) Démontrer que *f* est une densité de probabilité sur [0 ; 20].
b) Calculer la probabilité de l'événement *E* "La production quotidienne est supérieure ou égale à 12 tonnes".
c) Calculer l'espérance mathématique de *X*.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

II. Loi uniforme.

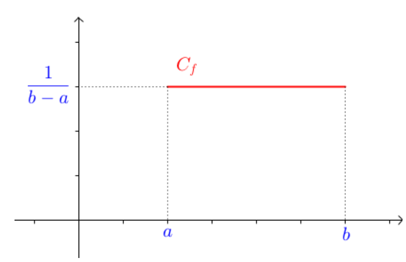
On choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $[0\,;10]$.

....
....
....

1) Définition et propriété

Définition

La loi uniforme sur $[a\,;b]$, notée $U([a\,;b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité une fonction constante .



....
....
....
....
....

Propriété

Soit f est la fonction de densité associée à $U([a\,;b])$, alors
$f(t) =$

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a\,;b])$,
Alors, pour tout c et d de $[a\,;b]$, on a : $P(c \le X \le d) = \frac{\quad}{\quad}$.

Démonstration :

....
....
....

2) Espérance mathématique

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a\,;b])$, alors $E(X) =$ ....

Démonstration :

....

....

III. Loi exponentielle.

1) Définition et propriétés

Propriété

Soit λ un nombre réel strictement positif. La fonction f définie par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une fonction de densité sur $[0\,;\,+\infty[$

Démonstration :

....

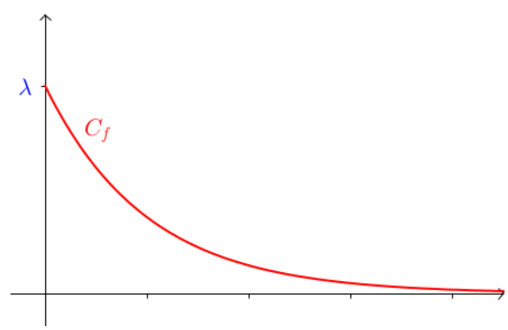
....

....

Définition

Soit λ un nombre réel strictement positif. On appelle loi exponentielle de paramètre λ , la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Contextes d'utilisation :Durée de vie de composants électroniques, tremblement de terre, désintégration d'un noyau radioactif, …



Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Alors, pour tout a de $[0\,;\,+\infty[$, on a :
$P(X \leq a) =$............................ et $P(X > a) =$.............................

Démonstration :

....

....

....

Exemple :

X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

$P(1 \leq X \leq 3) =$..

2) Durée de vie sans vieillissement

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors, pour tout réel t et h positifs, on a : $P_{(X\geq t)}(X \geq t + h) =$ ....

Démonstration :

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir utiliser la durée de vie sans vieillissement :*

La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0035. Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.

....

....

....

3) Espérance mathématique

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ Alors : $E(X) =$ ....

Démonstration (ROC exigible BAC) :

f désigne la densité de la loi exponentielle de paramètre λ, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ et g définie par $g(t) = t\,f(t)$.

g est continue sur tout intervalle $[0\,;\,A[$, avec $A > 0$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

....

....

....

....

....

☑*Exercice BAC : Polynésie 2016 :*

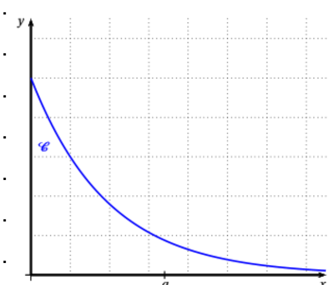
Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.
2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.
3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

....

☑*Exercice BAC : Métropole 2016 :*

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :
— pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
— pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $p(T \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,dx$.



1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.
   a. Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.
   b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
   c. En déduire que $\lim_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.
2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.
3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.
   a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
      Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.
   b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
      Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
   c. Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
      Interpréter ce résultat.

....