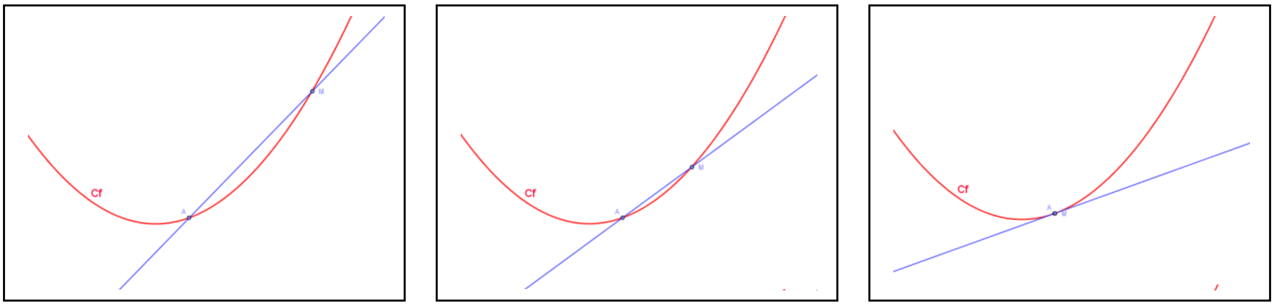
Fonctions dérivées.

I. Tangente à une courbe.

Introduction :

On considère la courbe représentative d'une fonction f, et A, un point de cette courbe.

On prend un autre point M de C_f, on trace la droite (AM) et on rapproche le point M de A.



Définition

Soit f une fonction, C_f sa courbe et A $(a ; f(a))$ et M$(x ; f(x))$ deux points de C_f.
On appelle tangente en A à la courbe C_f la droite notée T_A obtenue lorsque M se rapproche de A.

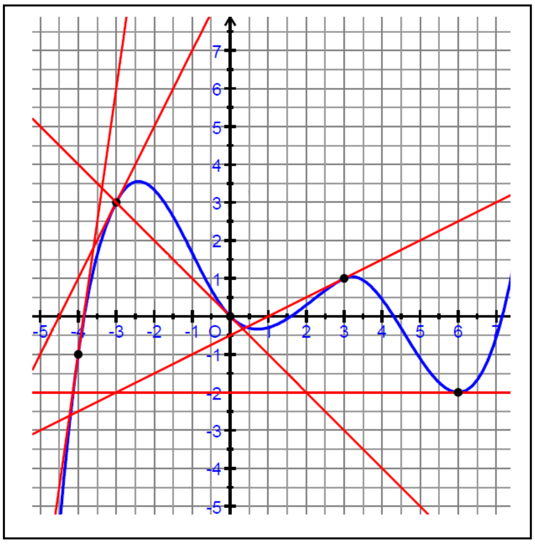
II. Nombre dérivé.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel appartenant à I. On appelle nombre dérivé de f en a le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe C_f au point A $(a ; f(a))$. On note ce nombre $f'(a)$.

☑*Savoir faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par lecture graphique :*

On donne ci contre la courbe représentative C_f d'une fonction f ainsi que certaines de ses tangentes.



1) Détermine par lecture graphique $f(-4)$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(3)$ et $f(6)$.

....

....

....

2) Détermine par lecture graphique $f'(-4)$; $f'(-3)$; $f'(0)$; $f'(3)$ et $f'(6)$.

....

....

....

3) Détermine l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

....

4) Dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	
Variations de $f(x)$	

II. Fonction dérivée.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction qui a tout nombre x de I associe le nombre dérivé de f en x s'appelle la fonction dérivée de f et se note $f\,'$.

Fonction dérivée des fonctions usuelles :

fonction f d'expression	*fonction dérivée $f\,'$ d'expression*	*ensemble de dérivabilité*
$f(x)=k$ ($k\in$I; R)		
$f(x)=x$		
$f(x)=\sqrt{x}$		
$f(x)=x^2$		
$f(x)=x^3$		
$f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)		
$f(x)=\frac{1}{x}$		
$f(x)=\frac{1}{x^2}$		
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$)		

Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Propriété

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur intervalle I et k un nombre réel, alors :

- la fonction $k\times u$ est dérivable sur I et $(k\times u)'=k\times u\,'$.
- la fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v\,'$.
- la fonction $u\times v$ est dérivable sur I et $(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$.

☑*Savoir faire : Savoir dériver une fonction polynôme :*

Détermine les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

....

....

....

....

Propriété

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur intervalle I et k un nombre réel, alors :

- la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout nombre n'annulant pas v et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-v'\times u.}{v^2}$

☑*Savoir faire : Savoir dériver une fonction rationnelle :*

....

....

....

....

Propriété

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point A (a ; $f(a)$) une **tangente** T_A qui a pour équation :
$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

☑*Savoir faire : Savoir déterminer l'équation d'une tangente par le calcul :*

1) Soit f définie par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$. Détermine l'équation de la tangente à C_f au point qui a pour abscisse 1.

………

………

………

2) Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. C_f a-t-elle des tangentes parallèles à la droite qui a pour équation $y = -x + 1$?

………

………

………

………

IV. Fonction dérivée et sens de variation.

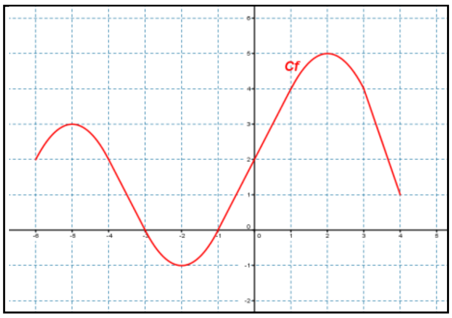
Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

☑*Savoir faire : Savoir déterminer graphiquement le signe d'une dérivée :*

On donne ci contre la courbe représentative C_f d'une fonction f.



1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

♦ $f(x) = 0$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

♦ $f'(x) = 0$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

♦ $f(x) > 0$.

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

♦ $f'(x) > 0$.

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

♦ $f(x) < 0$.

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

♦ $f'(x) < 0$.

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

2) Etablir le tableau de signes de f.

x	
Signes de $f(x)$	

3) Etablir le tableau se signes de f'.

x	
Signes de $f'(x)$	

V. Application à l'étude d'une fonction.

☑*Savoir faire : Savoir étudier une fonction polynôme du 3° degré :*

On considère la fonction f définie sur $I\!R$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

1) Déterminer $f'(x)$.

2) Déterminer le signes de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

x	

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A (1 ; -1).

☑*Savoir faire : Savoir étudier une fonction rationnelle :*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer $f'(x)$.

3) Etablir le tableau de variations de f.

x	

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A qui a pour abscisse 1.