<u>Devoir n°10 durée 2h:</u>

Baccalauréat S Pondichéry 26 avril 2017

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	l3	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

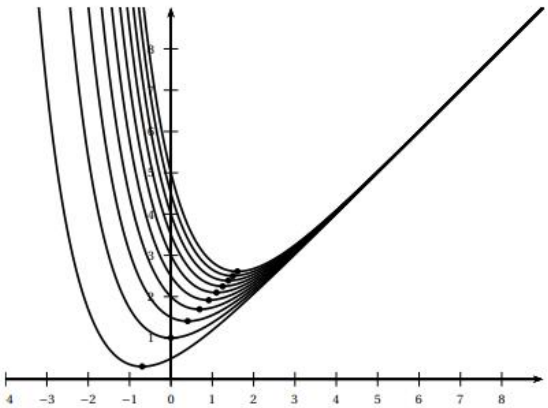
Baccalauréat S Liban 5 juin 2017

Exercice 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?*

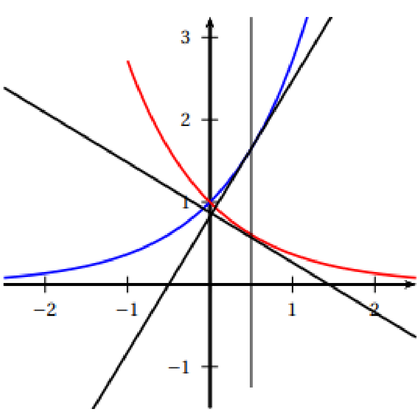
Baccalauréat S Antilles-Guyane 16 juin 2017

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	$-2,5$	2
4	-2	2
5	$-1,5$	2
6	-1	2
7	$-0,5$	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.
2. **a.** Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

   b. Démontrer cette conjecture.

*