devoir 12.

Exercice I. démonstrations exigibles

1. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :
Soit un réel a > 0 ∀ ∈ N, $(1 + a)^n > 1 + na$.
2. Démontrer que pour tout nombre q > 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exercice II. Suites

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$
Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique, en déduire la limite de (u_n).

Exercice III. Récurrence et convergence monotone

Soit (u_n) croissante définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4, en déduire qu'elle converge.

Exercice IV. Récurrence et comparaison

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

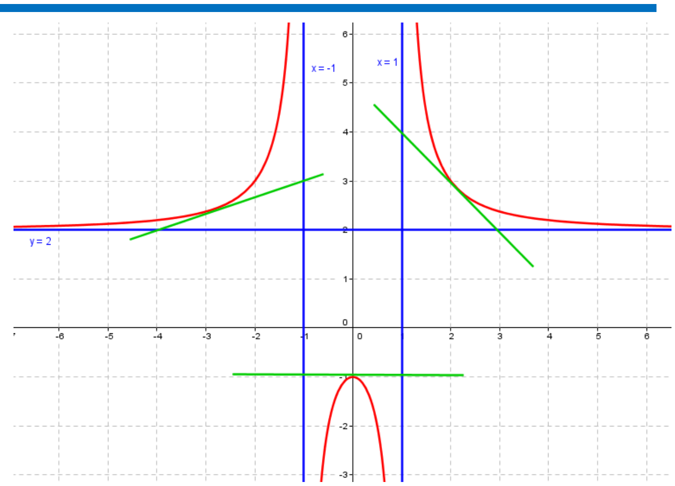
a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
c) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n).

Exercice V. Limites de fonction

On considère la fonction f représentée ci-contre.

On a représenté ses asymptotes et 3 tangentes.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer graphiquement f'(-2,5), f'(0) et f'(2)-
4. Établir le tableau de variations de f.



Exercice VI. Calculs de limites

Calcule les limites suivantes, en justifiant ta réponse :

$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-3}{(x+2)(x-1)}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$ $\quad c)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$ $\quad d)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Exercice VII. Étude d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie sur]- ∞; 2[U]2 ;+∞[par : $f(x) = 4x + 3 + \frac{9}{x-2}$

1. Montrer que $f(x) = \frac{4x^2-5x+3}{x-2}$

2. Calculer les limites de f en 2, en +∞ et en −∞.

Traduire les résultats en termes d'asymptotes.

3. Déterminer la fonction dérivée $f\,'$.

4. Résoudre $f\,'(x) = 0$ puis déterminer le signe de la dérivée $f\,'$.

5. Dresser le tableau de variation.

Exercice VIII. Étude d'une fonction avec l'exponentielle

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x + e^x$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$

4) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.