

Exercice III

Partie A.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = 2A - 5B = \begin{pmatrix} 1 \times 2 & 2 \times 2 \\ 1 \times 2 & 1 \times 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \times 5 & 0 \times 5 \\ 1 \times 5 & 3 \times 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -3 & -13 \end{pmatrix}$$

$$D = A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 3 \\ 1 \times 2 + 1 \times 1 & 1 \times 0 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = B \times A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 1 & 2 \times 2 + 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 3 \times 1 & 1 \times 2 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A \times A^{-1} = I_2$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc Soit } \begin{pmatrix} 1a + 2c & 1b + 2d \\ 1a + 1c & 1b + 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -c + 2c = 1 \\ b + 2(1-b) = 0 \\ a = -c \\ d = 1-b \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 \\ b + 2 - 2b = 0 \\ a = -1 \\ d = 1 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=1 \\ b=2 \\ a=-1 \\ d=-1 \end{cases}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Partie B

$$1. A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

~~$$= \begin{pmatrix} -3 \times 0 + 5 \times 1 + 6 \times (-1) & -3 \times 1 + 5 \times (-3) + 6 \times 0 & -3 \times (-1) + 5 \times 2 + 6 \times (-1) \\ -1 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times (-1) & -1 \times 1 + 2 \times (-3) + 2 \times 2 & -1 \times (-1) + 2 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times 1 + 1 \times (-3) + 1 \times 0 & 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 1 \times (-1) \end{pmatrix}$$~~

$$= \begin{pmatrix} -1 & -18 & 7 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. On a $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A \times X = B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A \times X = B$ alors $X = A^{-1} \times B$

$$A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 \\ -1 \times 1 + 3 \times 2 + 0 \times 3 \\ 1 \times 1 - 2 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice IV

Partie A

1. Le code SUSPENS est reconnu par le graphe

2.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe ~~est~~ ~~est~~ correspond à la valeur de la dernière colonne de la première ligne de la matrice A^4 , soit 3.

Ces codes sont : SPES ; SCES ; SENS.

Partie B

1. Oui il le peut car le graphe n'a que des sommets d'ordre pair et il est connexe, donc il admet un cycle eulérien. d'après - - -

2.

	D	A	B	C	E	T	V	R	N
D	2								
C		∞	19(D)	18(D)	∞	∞	∞	∞	∞
B		∞	19(C)		56(C)	∞	∞	∞	∞
A		54(B)			56(C) 60(B)	82(B)	∞	∞	∞
E					56(C) 60(B)	82(B) 79(A)	∞	112(A)	∞
T						79(A)	∞	112(A) 105(C)	∞
V							95(T)	103(C) 103(T)	∞
R								105(C) 127(V)	127(V) 130(C)