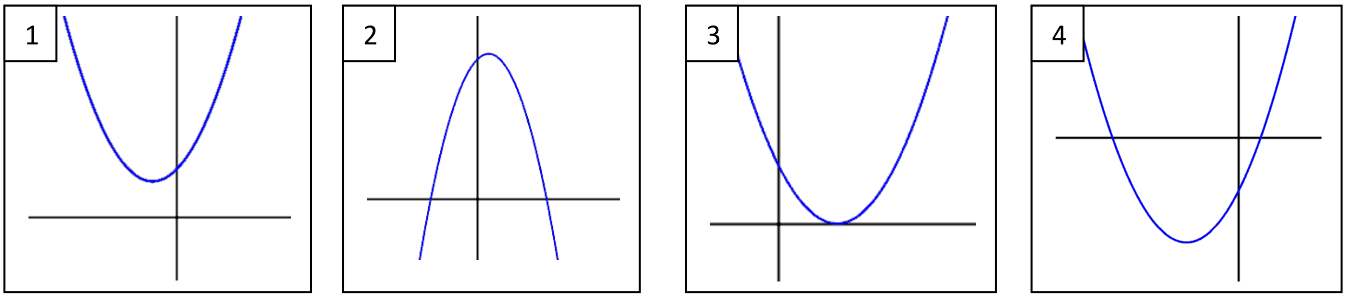
Devoir de mathématiques n°2.

Durée du devoir : 3h, la calculatrice est autorisée.
L'occasion de faire le point sur toutes les notions abordées, bon courage.

Exercice I : Second degré.

Pour chacune des courbes ci-dessous, préciser : le signe de a, b, c, α, β, Δ, x_1 et x_2 (lorsqu'ils existent)



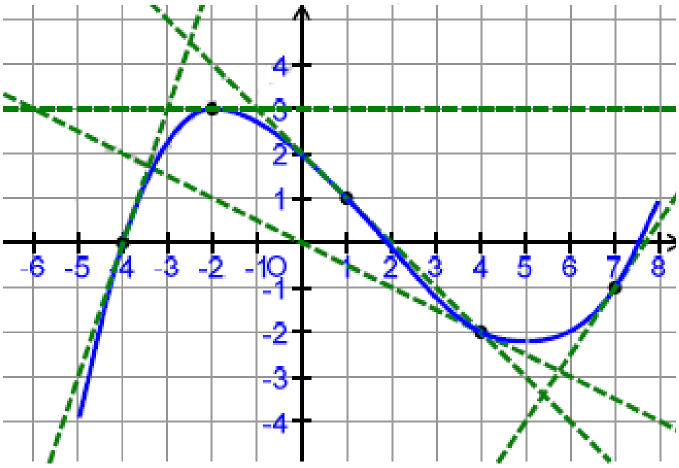
Exercice II : Equations, inéquations.

Résoudre : (E_1) : $3x + 5 = 5x - 1$ (E_2) : $x^2 - 5x + 6 = 0$ (E_3) : $-2x^2 - 3x + 1 = 0$

(I_1) : $-3x + 15 < 5x + 1$ (I_1) : $-3x^2 + x - 2 < 0$

Exercice III : Lecture graphique.

Voici la courbe représentative d'une fonction *f* définie sur *IR*. A l'aide du graphique :



1. Déterminer $f(-4)$; $f(-2)$; $f(1)$; $f(4)$ et $f(7)$.

2. Déterminer $f'(-4)$; $f'(-2)$; $f'(1)$; $f'(4)$ et $f'(7)$.

3. Déterminer le nombre de solutions de $f(x)=0$.

4. Déterminer le nombre de solutions de $f'(x)=0$.

5. Etablir le tableau de signes de $f(x)$ sur *IR*.

6. Etablir le tableau de signes de $f'(x)$ sur *IR*.

Exercice IV : Etude de fonction.

Soit *f* la fonction définie sur *IR* par $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 2$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Etablir le tableau de signes de $f'(x)$.

3. Etablir le tableau de variations de f.

4. Montrer que l'équation $f'(x)=7$, admet une unique solution α appartenant à [-4 ; -3].

5. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de α au dixième près.

Exercice V : Etude de fonction.

Soit f, la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer $f'(x)$.

3. Etablir le tableau de signes de $f'(x)$.

4. Etablir le tableau de variations de f.

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à Cf au point d'abscisse 1.

Exercice VI : Suite arithmético géométrique. Liban 2013

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2.$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
   - **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n.
   - **c.** En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0{,}9^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.
   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

```
VARIABLES
a, i, n.
INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur 10
TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n,
a prend la valeur ....

SORTIE
Afficher a
```

3. **a.** Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0{,}9^n > 11{,}5$.
   b. En donner une interprétation.

Exercice VII : Suite arithmético géométrique. Métropole juin 2013

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1OOO de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000+n)$ par une suite (U_n). On a donc $U_0 = 120000$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $U_n = 120000 \times 0,98^n$.

2. **a.** Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?

b. Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.
Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90000$.

1	**Variables :**	A est un réel
2		n est un entier naturel
3		
4	**Initialisation :**	Affecter à A la valeur 120 000
5		Affecter à n la valeur 0
6		
7	**Traitement :**	Tant que $A \geqslant 90000$
8		n prend la valeur ...
9		...
10		Fin Tant que
11		
12	**Sortie :**	Afficher n

3. **a.** Exprimer $1+0,98+0,98^2+\cdots+0,98^n$ en fonction de n.

b. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.
Montrer que $S_n = 6000000 \times \left(1-0,98^{n+1}\right)$.

c. En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.