

# Devoir de mathématiques n°3.

*Durée du devoir : 2h, la calculatrice est autorisée.*

## Exercice I : QCM.

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie, en justifiant votre choix.*

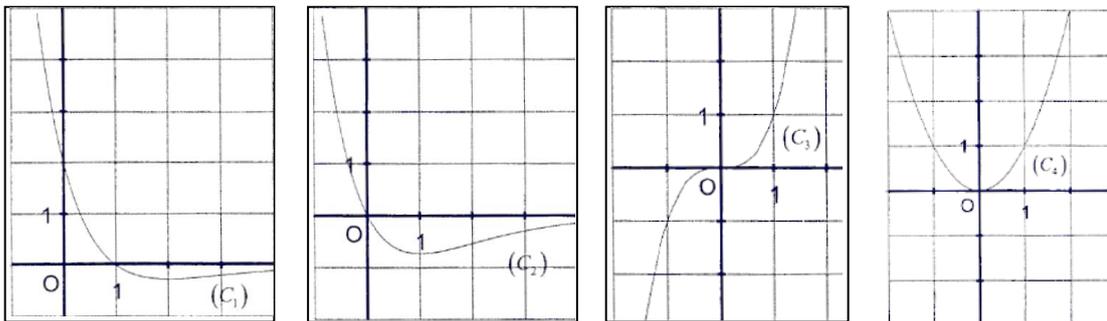
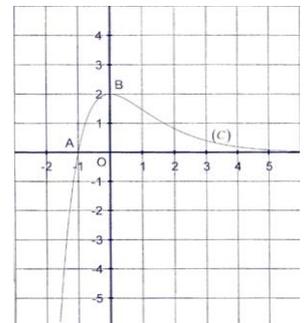
1. Une augmentation de 20% suivie d'une augmentation de 15% est équivalente à une augmentation globale de :

- a. 17,5%                      b. 30%                      c. 35%                      d. 38%

2. Pour tout  $n$  entier naturel, on définit la somme  $S_n = 1 + 0,75 + 0,75^2 + \dots + 0,75^n$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+$  :

- a.  $S_n$  tend vers  $+$     b.  $S_n$  n'a pas de limite.    c.  $S_n$  tend vers 0.    d.  $S_n$  tend vers 4.

3. Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a tracé ci-contre sa courbe représentative  $C$  dans un repère orthonormal. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Le point  $B(0 ; 2)$  appartient à la courbe. La courbe admet en  $B$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Laquelle des courbes ci-dessous représente la fonction  $f'$ .



4. On définit la fonction  $f$  sur  $]1 ; +[$  par  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ . Au point d'abscisse 2, la tangente à la courbe représentative de  $f$  a pour équation :

- a.  $y = -3x + 6$ .    b.  $y = -3x + 10$ .    c.  $y = -3x - 2$ .    d.  $y = -3x - 6$ .

## Exercice II : Suites.

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70% des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés. Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

- Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012.
- On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = 600$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,7u_n + 210$ . On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite  $(u_n)$ .

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer  $u_1$  ; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite  $(u_n)$ .

- On pose, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n = u_n - 700$ .

	A	B
1	n	$u_n$
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

- a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,7. Préciser son premier terme.  
 b. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 700 - 100 \times 0,7^n$ .
4. a. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  en +.  
 b. Soit  $n$  un entier naturel. Démontrer que  $u_n > 697$  est équivalent à  $0,7^n \leq 0,03$ .  
 c. Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$N$ est un nombre entier naturel
<b>Initialisation :</b>	Affecter à $N$ la Valeur 0 Affecter à $U$ la valeur 1
<b>Traitement :</b>	Tant que $U > 0,03$ Affecter à $N$ la valeur $N + 1$ . Affecter à $U$ la valeur $0,7 \times U$ . Fin du Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $N$ .

Quelle valeur de  $N$  obtient-on en sortie ? (On fera tourner l'algorithme).

~~c. Retrouvez ce résultat en résolvant l'inéquation  $0,7^n \leq 0,03$ .~~

d. En utilisant l'étude précédente de la suite  $(u_n)$ , déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

### Exercice III : Probabilités

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de terminale de séries générales selon la série et le sexe, à la rentrée 2010.

	Filles	Garçons
Littéraire (L)	40 872	11 080
Sciences économiques et sociales (ES)	63 472	40 506
Scientifique (S)	71 765	87 031
Total	176 109	138 617

Source : Ministère de l'Éducation nationale, DEPP

Notations :  $p(A)$  désigne la probabilité d'un évènement A.

$p_A(B)$  désigne la probabilité d'un évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

On choisit au hasard un élève de terminale de série générale.

On note : F : l'évènement « L'élève choisi est une fille ».

G : l'évènement « L'élève choisi est un garçon ».

L : l'évènement « L'élève choisi est en série Littéraire ».

ES : l'évènement « L'élève choisi est en série Sciences Économiques et Sociales ».

S : l'évènement « L'élève choisi est en série Scientifique ».

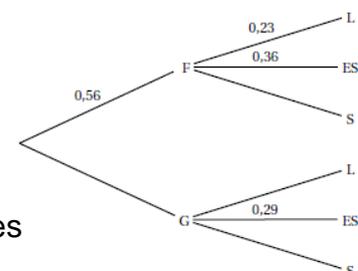
**Tous les résultats seront arrondis au centième.**

1. En utilisant les effectifs inscrits dans le tableau :

a. Sachant qu'on interroge un garçon, calculer la probabilité qu'il soit en série Littéraire.

b. Calculer  $p(S)$ .

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre :



3. En utilisant l'arbre complété et les propriétés des probabilités :

a. Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que l'élève choisi soit un élève de la série Sciences Économiques et Sociales est égale à 0,33.

b. Calculer  $p_{ES}(F)$ .

4. On choisit successivement et au hasard 10 élèves de terminale de série générale. On admet que le nombre de lycéens est suffisamment grand pour que ces choix soient assimilés à des tirages indépendants avec remise.

Calculer la probabilité de choisir exactement trois élèves de la série ES.

## Exercice IV : Etude de fonction.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ .

1. En utilisant votre calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction  $f$  et le nombre de points d'inflexion.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de  $f$  et montrer que  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ .
3. Etablir le tableau de signes de  $f'(x)$ .
4. Etablir le tableau de variations de  $f$ .
5.
  - a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0,2$  admet une unique solution  $\alpha$  appartenant à  $[-1 ; 1]$ .
  - b. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de  $\alpha$  au centième près.
  - c. En résolvant une équation du second degré, détermine la valeur exacte de  $\alpha$ .
6. On admet que l'expression de la dérivée seconde de  $f$  est  $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ .
  - a. Etablir le tableau de signes de  $f''(x)$ .
  - b. En déduire la convexité de la fonction  $f$  en précisant les points d'inflexion.