

# Devoir de mathématiques n°4.

Durée du devoir : 2h, la calculatrice est autorisée.

## Exercice I : Suites.

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite  $(u_n)$  où  $u_n$  désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année  $(2010 + n)$ . En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

► 1. Montrer que la situation peut être modélisée par  $u_0 = 50$  et pour tout entier naturel  $n$  par la relation :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 3. \quad (0,5 \text{ point})$$

► 2. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = 60 - u_n.$$

a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95. (0,75 point)

b) Calculer  $v_0$ . Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ . (0,75 point)

c) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n. \quad (0,5 \text{ point})$$

► 3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité. (0,5 point)

► 4. a) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité :

$$u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n. \quad (0,5 \text{ point})$$

b) En déduire la monotonie de la suite. (0,5 point)

► 5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010. (0,5 point)

( un algorithme écrit en langage naturel pour trouver est une réponse acceptée comme suffisante )

► 6. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ . Interpréter. (0,5 point)

## Exercice II : Probabilités

Une grande entreprise de restauration rapide spécialisée dans le poulet a effectué une enquête de satisfaction auprès d'un échantillon de 1 000 clients. Parmi ceux-ci, 40 % avaient mangé un Burger au poulet, 35 % avaient mangé un Crunchy au poulet et 25 % avaient mangé un Spicy au poulet.

Malheureusement, de nombreux clients ont été malades peu après leur repas.

Les pourcentages de malades suivant le plat mangé sont les suivants :

Burger au poulet	Crunchy au poulet	Spicy au poulet
15 %	40 %	60 %

Parmi tous les clients sondés, on en choisit un au hasard.

Dans la suite de l'exercice, on appelle :

B l'évènement « Le client choisi a mangé un Burger au poulet » ,

C l'évènement « Le client choisi a mangé un Crunchy au poulet » ,

S l'évènement « Le client choisi a mangé un Spicy au poulet » ,

M l'évènement « Le client choisi a été malade » .

1. a. Donner sans justification la probabilité  $P(S)$  puis la probabilité que le client choisi ait été malade sachant qu'il avait mangé un Spicy au poulet.

b. En déduire que la probabilité  $P(S \cap M)$  vaut 0,15 .

2. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.

3. a. Calculer  $P(B \cap M)$  et  $P(C \cap M)$  .

b. En déduire la probabilité que le client choisi ait été malade.

4. Déterminer la probabilité que le client choisi ait mangé un Crunchy au poulet sachant qu'il a été malade.

5. On appelle H l'évènement « Le client choisi a été hospitalisé » .

Parmi les clients malades ayant mangé un Burger au poulet, 12 % ont été hospitalisés.

Parmi les clients malades ayant mangé un Crunchy au poulet, 20 % ont été hospitalisés.

Parmi les clients malades ayant mangé un Spicy au poulet, 30 % ont été hospitalisés.

Peut-on estimer qu'il y a plus d'une chance sur 10 que le client choisi ait été hospitalisé ?

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*

## Exercice III : Etude de fonction. Métropole 21 juin 2013

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue. L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note  $x$  le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. ( $x$  varie donc dans l'intervalle  $[0 ; 3,6]$ ). Le bénéfice hebdomadaire est noté  $B(x)$ , il est exprimé en milliers d'euros. L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction  $B$ . Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

### Partie A : étude graphique

On a représenté, ci-contre, la fonction  $B$  dans un repère du plan. Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ? Pour quel nombre  $N$  de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?



### Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté  $B(x)$ , exprimé en milliers d'euros vaut  $B(x) = -5 + (4 - x)e^x$ .

1. a. On note  $B'$  la fonction dérivée de la fonction  $B$ .  
Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I = [0 ; 3,6]$ , on a :  $B'(x) = (3 - x)e^x$ .  
b. Déterminer le signe de la fonction dérivée  $B'$  sur l'intervalle  $I$ .  
c. Dresser le tableau de variation de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $I$ . On indiquera les valeurs de la fonction  $B$  aux bornes de l'intervalle.
2. a. Justifier que l'équation  $B(x) = 13$  admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$ , l'une dans l'intervalle  $[0 ; 3]$  l'autre dans l'intervalle  $[3 ; 3,6]$ . À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.
3. a. On note  $B''$  la fonction dérivée seconde de la fonction  $B$ . Déterminer  $B''(x)$ .  
b. En déduire la convexité de la fonction  $B$  en précisant les points d'inflexion.