15 janvier 2014

Terminale ES / L

Devoir n°5

MATHEMATIQUES

Série Lycée ES/L

L'usage de la calculatrice est autorisé

Nature de l'épreuve : écrite
Durée de l'épreuve : 3 heures

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4.

Exercice I : QCM. (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte enlève un point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction F définie sur R par $F(x) = e^{-x^2}$ est une primitive de la fonction *f* définie par :

A : $f(x) = -xe^{-x^2}$ B : $f(x) = -2xe^{-x^2}$ C : $f(x) = xe^{-x^2}$ D : $f(x) = e^{-2x}$

2. Soit la fonction h définie sur R par $h(x) = (7x - 23)e^x$ .L'équation $h(x) = 0$

A : a pour solution 2,718 B : a une solution sur [0 ; +∞[

C : a deux solutions sur]-∞ ; +∞[R D : a une solution sur]−∞; 0]

3. La fonction g définie sur R par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

A :]−∞; +∞[B : [0 ; +∞[C :]−∞; 0] D : [−3 ; 3]

4. On considère la suite géométrique (U_n) de premier terme $U_0=2$ et de raison q= 1,05.

La somme S des 12 premiers termes de cette suite est :

A : $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{12}}{1-1{,}05}$ B : $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{13}}{1-1{,}05}$ C : $S = 1{,}05 \times \frac{1-2^{12}}{1-2}$ D : $S = 1{,}05 \times \frac{1-2^{13}}{1-2}$

Exercice II : Suites. (5 points)

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents.
Chacune des années suivantes on a constaté que :

— 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
— 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 80 {Initialisation} Pour i allant de 1 à n Affecter à X la valeur $0,9X + 20$ Fin Pour X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1. Pour la valeur *n* = 2 saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2. Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur *n* = 2 saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 20$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 200$.

a. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer b_n en fonction de n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 200 - 120 \times 0{,}9^n$.

3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?

2. Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

Exercice III : Probabilités (5 points)

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2 000 clients, dont l'abonnement a plus de 12 mois d'ancienneté.
Parmi eux :
• 900 n'ont jamais subi de coupure prolongée de connexion.
• 500 clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion dans les 12 derniers mois.
• les autres clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an.
L'enquête révèle que :
• 95% des clients n'ayant jamais subi de coupure prolongée se déclarent satisfaits du service fourni.
• 50% des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion dans les douze derniers mois se déclarent satisfaits du service fourni.
• 70% des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an se déclarent satisfaits du service fourni.
On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont été interrogés. On considère les évènements suivants :
J : « le client n'a jamais subi de coupure prolongée de connexion »
R : « la dernière coupure prolongée de connexion du client est survenue au cours des douze derniers mois » (elle est « récente »)
A : « la dernière coupure prolongée de connexion du client date d'il y a plus d'un an » (elle est « ancienne »)
S : « le client se déclare satisfait ». $\bar{S}$ désigne l'évènement contraire de S.

1. a. Calculer les probabilités des évènements J ,R et A.

b. Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

2. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion.

3. Démontrer que la probabilité que le client choisi se déclare satisfait est égale à 0,762 5.

4. Le client choisi se déclare satisfait du service fourni. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième) ?

5. On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête.

On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare
non satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).

<u>Exercice IV :</u>Etude de fonction. (6 points)

Partie 1

On a représenté dans le repère ci-contre, la courbe représentative de C d'une fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle [−2; 4].

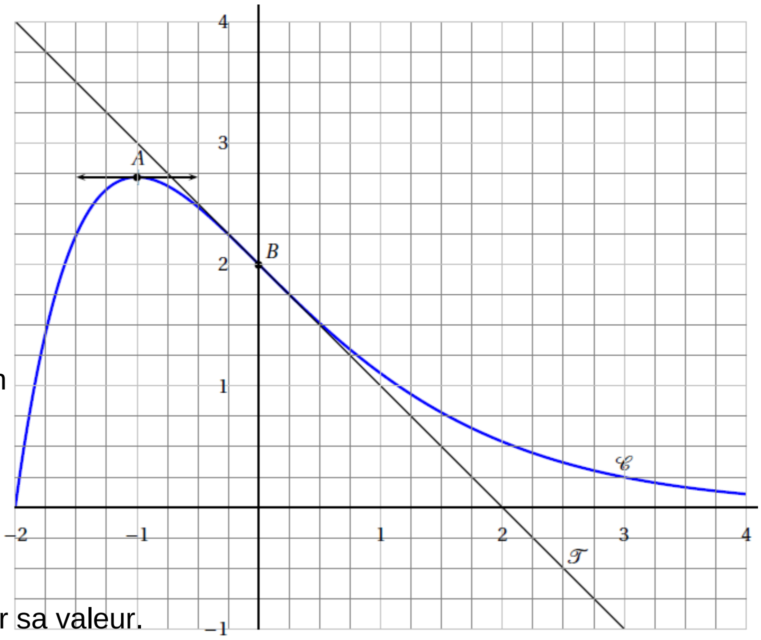
On nomme *A* le point de C d'abscisse −1 et *B* le point de C d'abscisse 0.

— La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle [−2; −1] et strictement décroissante sur l'intervalle [−1; 4].

— La tangente à C au point *A* est horizontale.

— La droite T est la tangente à C et a pour équation $y = -x + 2$.

Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.



1. **a.** Donner la valeur de $f\,'(-1)$.

b. Déterminer le signe de $f\,'(2)$.

c. Interpréter graphiquement $f\,'(0)$, puis donner sa valeur.

2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ exprimée en unités d'aire.

Partie 2

La fonction de la **partie A** a pour expression $f\,(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point *A* de la courbe .

2. a. Etablir que $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [−2; 4].

3. a. Prouver que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur [0 ; 3].

b. Donner un encadrement de α au centième près.

4. Etudier la convexité de la fonction f.

5. Montrer que la fonction *F* définie sur l'intervalle [−2; 4] par $F = (-x - 3)e^{-x}$ est une primitive de f .

Faites-moi plaisir !!!!!