Généralités sur les suites, suites géométriques et récurrence.

45 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$.
La conjecture est-elle vérifiée ?

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 5$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

4. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

5. Calculer u_{100}.

Notion de limite de suite

1 On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{4}{n}$.

1. Déterminer le premier rang n tel que $|u_n| < 0{,}01$.

2. Conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$, puis justifier la conjecture.

8 Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = \frac{5n - 10}{3}.$$

1. Soit A un réel.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que :

$$t_N \geqslant A.$$

b. Prouver que, pour tout $n \geqslant N$, $t_n \geqslant A$.

2. En déduire le comportement de la suite (t_n) quand n tend vers $+\infty$.

9 ALGO **Raisonner, communiquer**

On considère l'algorithme ci-dessous.

```
n ← 0
u ← 1
Tant que u ⩽ 10^6
        n ← n + 1
        u ← 2u + 1
```

Dans cet algorithme, les valeurs affectées à la variable u sont les termes d'une suite (u_n).

1. a. Quelle est la valeur de u_0 ?

b. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (u_n) ?

2. Que représente, pour la suite (u_n), la valeur de la variable n en fin d'exécution de cet algorithme ?