Fonction exponentielle.

I. Rappels sur les puissances.

Définition

Soit a un nombre réel et n un entier, on note a^n =……………………………….
si $a \neq 0$, on définit a^{-n} =…… c'est-à-dire que a^{-n} est *l'inverse* de a^n.

Par convention, on pose ………………………………………………………………………...

Propriétés

Soit a un nombre réel et n et p des entiers, alors :

♦ $a^n \times a^m$ = …… ♦ $(a^n)^m$ = …… ♦ $\dfrac{a^n}{a^m}$ = ……

☑*Savoir faire : Utiliser les formules avec les puissances :*

$3^{10} \times 3^7$ = ………..= ……….. ; $7^{10} \times 7^{-8}$ = ………..= ……….. ; $(5^{-2})^{-3}$ = ………..= ……….. ; $(9^{-2})^{4}$ = ………..= ………..

$\dfrac{7^9}{7^4}$ = ………..= ……….. ; $\dfrac{4^3}{4^{10}}$ = ………..= ……….. ; $\dfrac{2^5}{2^{-4}}$ = ………..= ………..= ……….. ; $\dfrac{3^{-2}}{3^{-7}}$ = ……….. = ………..= ………..

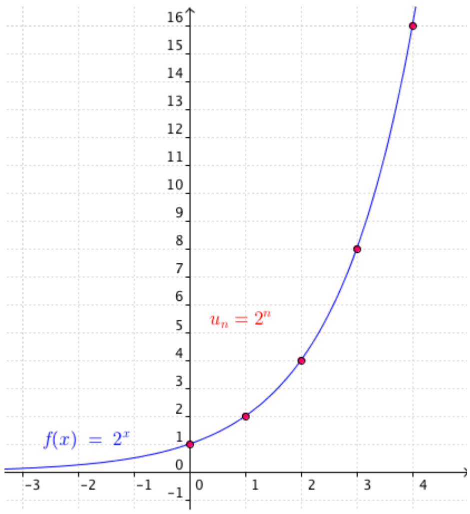
II. Fonction exponentielle de base q.

1) Définition

On considère la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 2$. Elle est définie par définie par $u_n = 2^n$.
A l'aide d'un tableur, on la représente.

E2 f_x =2^E1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	1	2	3	4	5	6	7
2	Un	2	4	8	16	32	64	128



En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction $f : x \mapsto 2^x$.
On a $f(3) = 2^3$ mais on a aussi $f(1,5) = 2^{1,5} \approx 2,828$.
La fonction f est une fonction continue dont la courbe passe par les points de la suite (u_n). On appelle la fonction exponentielle de base 2.

Définition

La fonction $f : x \mapsto q^x$, avec $q \exists 0$, s'appelle <u>fonction exponentielle de base q</u>.

<u>Exemple :</u>
La fonction exponentielle de base 0,5 est définie IR sur par $f : x \mapsto 0,5^x$.

……

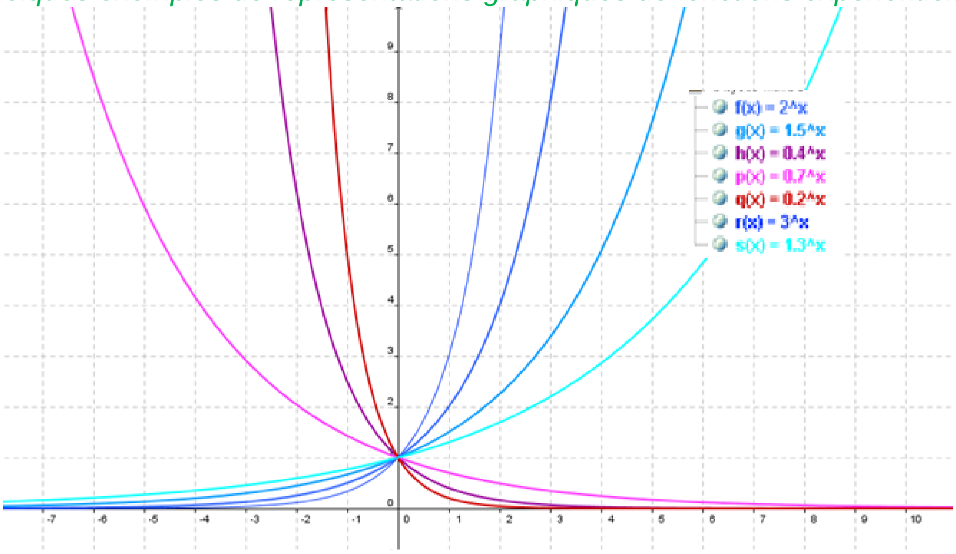
……

……

Propriété (admise)

La fonction exponentielle de base q est définie, strictement positive, continue et dérivable sur IR.

Exemples : Voici quelques exemples de représentations graphiques de fonctions exponentielles de base q :



Remarques :

♦ *Quel que soit q, q^0 = ... donc la courbe passe par le point (.... ; ....).*

♦ *La fonction exponentielle de base q est convexe.*

Propriété (admise)

On considère f la fonction exponentielle de base q.

♦ Si $0 < q < 1$ alors f *est........................sur IR et on a .... et ....*

♦ Si $1 < q$ alors f *est ....sur IR et on a .... et ....*

☑*Savoir faire : Savoir utiliser une fonction exponentielle de base q :*

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = 50000 \times 1{,}15^x$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.

....

....

....

2) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].

....

....

....

....

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

....

....

....

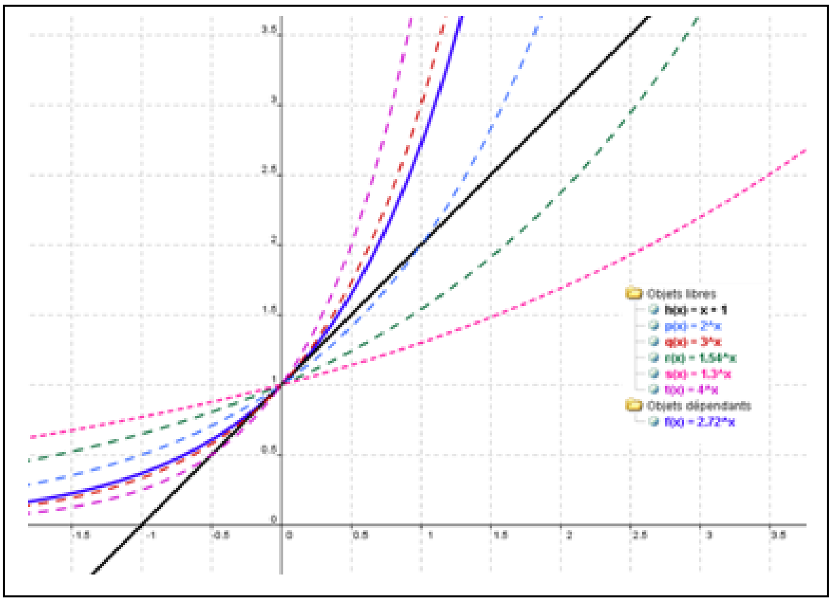
Relation fonctionnelle

Pour tout réel x et y, on a :

♦ $q^{x+y} = q^x \times q^y$ ♦ $q^0 = 1$ et $q^1 = q$ ♦ $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$ ♦ $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$ ♦ $\left(q^x\right)^n = q^{nx}$ avec $n \in$ Z.

III. Fonction exponentielle de base e.

1) Définition.



Définition

Parmi toutes les fonctions exponentielles de base q, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point (0 ; 1) a pour coefficient directeur 1. On appelle cette fonction <u>la fonction exponentielle</u>, on la note exp.

Remarque : L'image de 1 par la fonction exp n'est pas un nombre rationnel, on le désigne par une lettre : e.
Graphiquement on voit que ......< e < ...... Avec la calculatrice on obtient $e \approx$ ....
La fonction exponentielle est donc la fonction exponentielle de base e : pour tout réel x, on a $exp : x \mapsto e^x$.
On a donc e^0 =...... ; e^1 =...... ; pour tout réel x, ...>....... ; le nombre dérivé de exp en 0 est ......

Relation fonctionnelle

Pour tout réel x et y, on a :

♦ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ♦ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ♦ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ♦ $(e^x)^n = e^{x \times n}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque : La fonction exponentielle transforme une somme en un produit.

☑ *<u>Savoir faire : Savoir utiliser la relation fonctionnelle de l'exponentielle :</u>*
Simplifie les écritures des nombres suivants :

2) Etude le la fonction exponentielle.

Propriété (admise)

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur IR et ($exp(x)$)' = ...

☑*Savoir faire : Savoir dériver une fonction avec la fonction exponentielle :*

Dériver sur IR les fonctions suivantes :

♦ $f(x) = 2x + 5e^x$ ♦ $g(x) = xe^x$ ♦ $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

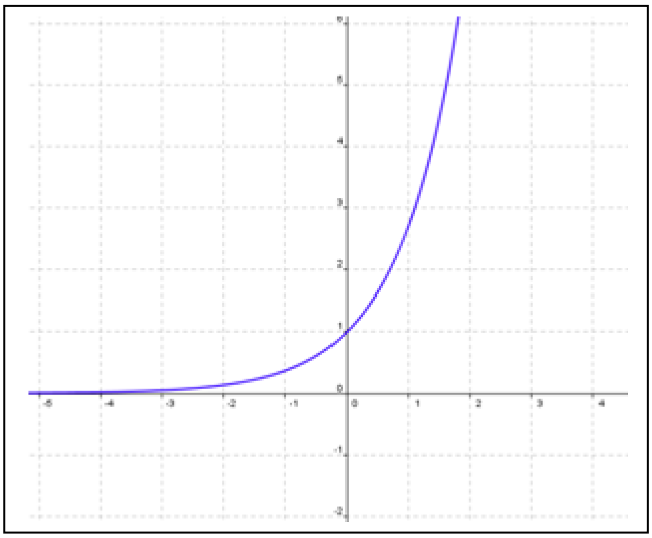
....
....
....
....
....
....

Propriété (démontrée)

La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR *et on a* .... *et* ....

x	
Signes de $exp(x)$	

x	
Signes de ($exp(x)$)'	
Variations de exp	



Propriété

Pour tout réel a et b, on a :

♦ $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ ♦ $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ (*car la fonction exp est strictement croissante sur IR*).

☑*Savoir faire : Savoir résoudre des équations et inéquations avec l'exponentielle :*

1) Résoudre dans IR l'équation (E) : $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

....
....
....

2) Résoudre dans IR l'inéquation (I) : $e^{4x-1} \geq 1$.

....
....
....

IV. Fonctions de la forme e^u.

Propriété (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto e^u$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

☑Savoir faire : Savoir dériver une fonction du type e^u :

Dériver sur IR les fonctions suivantes :

- $f(x) = e^{3x+5}$
- $g(x) = e^{3x^2+5x+1}$
- $h(x) = e^{-x^2}$

………………………………………… ………………………………………… …………………………………………
………………………………………… ………………………………………… …………………………………………
………………………………………… ………………………………………… …………………………………………
………………………………………… ………………………………………… …………………………………………

☑Savoir faire : Savoir étudier une fonction du type e^u :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Etudier la limite de f en $-\infty$.

……
……
……

b) Calculer la dérivée de la fonction f.

……
……
……
……
……

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f. On donne et on admet que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$		

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique et déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

……
……
……

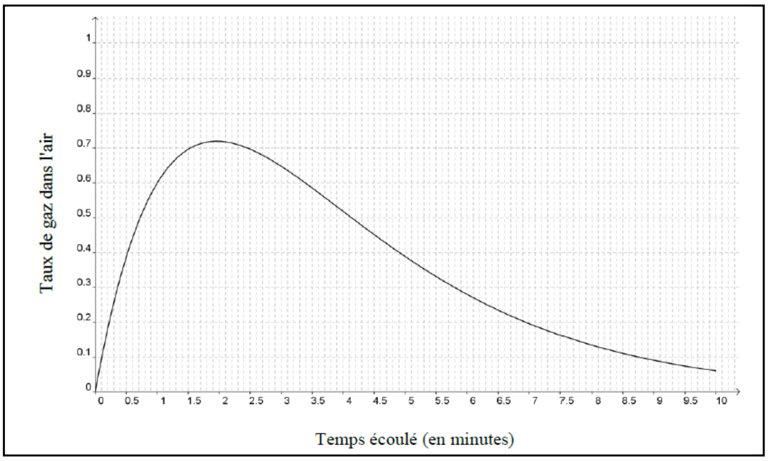
e) Démontrer que $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

……
……
……

f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

……
……
……
……
……

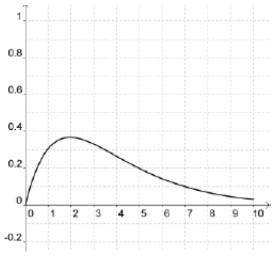
☑ Exemple type Bac :

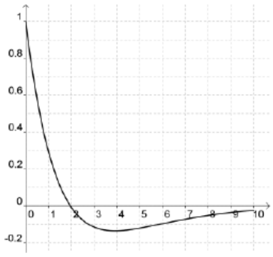


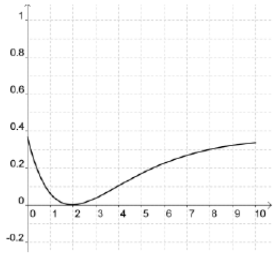
Partie A

Un dépôt de gaz à usage domestique (butane, propane, ...) a été étudié de telle sorte que, en cas d'accident du réservoir, l'évolution du taux de gaz dans l'air du dépôt soit modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :
$f(x) = x \times 0{,}6^x$, où x désigne le nombre de minutes écoulées après l'accident. On donne ci-dessous la représentation graphique de f sur [0 ; 10] .

1. a. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée $f\,'$ de f .
Préciser laquelle en justifiant la réponse.


Courbe A


Courbe B


Courbe C

b. La fonction dérivée $f\,'$ de f est définie sur [0 ; 10] par $f\,'(x) = (1 + \alpha x)\, 0{,}6^x$, où $\alpha \approx -0{,}51$.
Expliquer pourquoi on peut estimer que le taux de gaz dans l'air est maximal au bout d'environ 1,96 minute. En déduire ce taux maximal, arrondi à 0,01 près.

2. Suivant le taux de gaz dans l'air, le mélange peut présenter un danger d'explosion. La limite inférieure d'explosivité (LIE) est de 20 %. En dessous, le mélange air-gaz est trop pauvre pour exploser. La limite supérieure d'explosivité (LSE) est de 40 %. Au-dessus, le mélange air-gaz est trop riche pour exploser. Estimer par simple lecture graphique pendant combien de temps, après que le taux maximal a été atteint, le mélange air-gaz a été explosif.

Partie B

Le propriétaire du dépôt de gaz se voit proposer un autre type d'installation. En cas d'accident du réservoir, l'évolution du taux de gaz dans l'air du dépôt serait alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 10] par
$g(x) = 2{,}5\, x\, e^{-x}$, où x désigne le nombre de minutes écoulées après l'accident.

1. Calculer $g(10)$, arrondi à 0,001 près.

2. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 10] , $g'(x) = 2{,}5\, e^{-x}(1 - x)$.

3. a. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 10] l'inéquation $2{,}5\, e^{-x}(1 - x) / 0$.

b. En déduire le tableau de variation complet de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 10] .

4. a. Montrer que les équations $g(x) = 0{,}2$ et $g(x) = 0{,}4$ admettent chacune une solution unique sur l'intervalle [1 ; 10] .

b. À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi à 0,01 près de chacune de ces deux solutions.
Donner une estimation de la durée d'explosivité, après que le taux maximal.

☑ Liban 2013 :

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5\,;60]$ par :

$$C(x)=\frac{\mathrm{e}^{0,1x}+20}{x}.$$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.
   Montrer que, pour tout $x\in[5\,;60]$, $C'(x)=\dfrac{0,1x\mathrm{e}^{0,1x}-\mathrm{e}^{0,1x}-20}{x^2}$.
2. On considère la fonction f définie sur $[5\,;60]$ par $\quad f(x)=0,1x\mathrm{e}^{0,1x}-\mathrm{e}^{0,1x}-20$.
   a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5\,;60]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans $[5\,;60]$.
   c. Donner un encadrement à l'unité de α.
   d. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5\,;60]$.
3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5\,;60]$.
4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :
   a. $C(x)=2$.
   b. $C(x)=5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5\,;60]$.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

☑ Antilles- Guyane 2013 :

Partie A
On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;20]$. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :

1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
2. Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
3. Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I=\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par $f(x)=(5x-5)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. Montrer que $f'(x)=(-x+6)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;20]$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
3. Justifier que l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution α sur $[0\,;6]$. Donner la valeur arrondie au millième de α.
4. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;20]$ par $F(x)=(-25x-100)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0\,;20]$.
   b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;8]$. Donner sa valeur exacte.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0\,;20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x)=4$ admet une autre solution β sur $[6\,;\ 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € ? (Arrondir à l'unité).
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.
   Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).