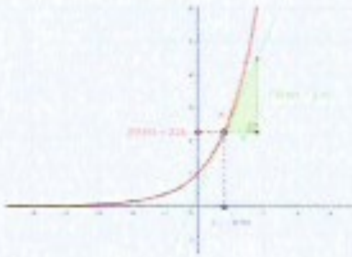
Fonction exponentielle.

Leonhard Euler (1707 ; 1783) mathématicien suisse, est le premier à chercher des méthodes pour approcher le nombre e.



I. Définition.

Définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle et se note $\exp : x \longmapsto \exp(x)$

Exemple : $\exp(0) = 1$ $\exp(1) \approx 2{,}71828$
$\exp(2) \approx 7{,}389$ $\exp(10) \approx 22\,026$

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

☺ Relation fonctionnelle.

Propriété : Pour tout nombres réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration : On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = \exp(x + y) \times \exp(-x)$.
Alors h est dérivable et $h(0) = \exp(y)$ $h = u \times v$ avec $u(x) = \exp(x+y)$ et $v(x) = \exp(-x)$
$h'(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp(-x) = 0$ $h'(x) = u'v + v'u$
Donc $h'(x) = 0$ Donc h est une fonction constante avec $u'(x) = \exp(x+y)$
donc $\forall x$ $h(x) = h(0) = \exp(y)$ donc $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ $v'(x) = -\exp(-x)$

Propriété : Pour tout nombres réels x et y, et pour tout entier relatif n :

- $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$
- $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

$\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$
$\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ $\exp(x - y) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Remarque : $\forall x \in R$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$, donc la fonction exp ne s'annule pas

☺ Le nombre e.

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $\exp(1) = e$

Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e. $e \approx 2{,}71828$
On a donc, pour tout entier relatif n : $\exp(n) = \exp(1 \times n) = [\exp(1)]^n = e^n$.
Par extension, on convient de noter pour tout nombre réel x, $\exp(x) = e^x$

Avec cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent :

Propriété : Pour tout nombres réels x et y, et pour tout entier relatif n :
$e^0 = 1$ $e^1 = e$ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $e^{nx} = (e^x)^n$

☑Savoir-faire : Savoir simplifier une écriture avec le nombre e :

Simplifie les écritures suivantes :

$A = \frac{e^2 \times e^3}{e^8} = \frac{e^{2+3}}{e^8} = \frac{e^5}{e^8} = e^{5-8} = e^{-3}$

$B = (e^2)^{-5} \times \frac{e^{-4}}{e^{-8}} = e^{2\times(-5)} \times e^{-4-(-8)} = e^{-10} \times e^4 = e^{-6}$

☺ Lien avec les suites géométriques.

Propriété : pour tout nombre a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a.

☑Savoir-faire : Savoir déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle :

Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = -2e^{-3n}$ c) $u_n = e^{2n-1}$

a) $u_n = e^{4n} = (e^4)^n$ Donc (u_n) est géométrique de raison e^4 et de 1^er^ terme $u_0 = 1$

b) $u_n = -2e^{-3n} = -2(e^{-3})^n$ Donc (u_n) est géométrique de raison e^{-3} et de 1^er^ terme $u_0 = -2$

c) $u_n = e^{2n-1} = \frac{e^{2n}}{e} = \frac{1}{e}(e^2)^n$ Donc (u_n) est géométrique de raison e^2 et de 1^er^ terme $u_0 = \frac{1}{e}$

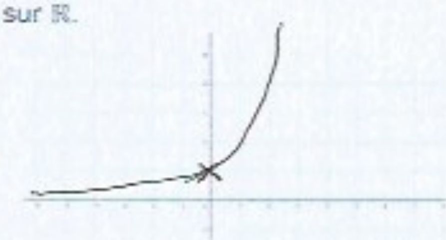
III Étude de la fonction exponentielle.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

exp : $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$. Donc la fonction dérivée de exp est positive donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
Signe de $(e^x)'$	+
Variations de $x \mapsto e^x$	↗



Propriété : Pour tout nombres réels a et b,
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

☑Savoir-faire : Savoir résoudre une équation ou une inéquation avec l'exponentielle :

Résoudre :

$(E_1) : e^{3x} = e^{2x-5}$

$(E_1) \Leftrightarrow 3x = 2x - 5$

$(E_1) \Leftrightarrow x = -5$

$S(E_1) = \{-5\}$

$(E_2) : e^{x^2} = e^{x+6}$

$(E_2) \Leftrightarrow x^2 = x + 6$

$(E_2) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$

$S(E_2) = \{-2 ; 3\}$

$(I_1) : e^{7x-1} \geq e^{3x}$

$(I_1) \Leftrightarrow 7x - 1 \geq 3x$

$(I_1) \Leftrightarrow 7x - 3x \geq 1$

$(I_1) \Leftrightarrow 4x \geq 1$

$(I_1) \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$

$S(I_1) = [\frac{1}{4} ; +\infty[$.

IV Étude de fonction avec la fonction exponentielle.

☑ *Savoir-faire : Savoir dériver une fonction avec l'exponentielle :*

Dériver les fonctions suivantes : $f(x) = 4x + e^x$ $\quad g(x) = (x-1)e^x$ $\quad h(x) = \frac{e^x}{x}$

a) $f = u + v$ avec $u(x) = 4x$ et $v(x) = e^x$ Donc $f' = u' + v'$ avec $u'(x) = 4$ $v'(x) = e^x$ $f'(x) = 4 + e^x$

b) $f = u \times v$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x$ Donc $f' = u'v + v'u$ avec $u'(x) = 1$ $v'(x) = e^x$

Donc $f'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = (1 + x - 1)e^x = xe^x$

c) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$ Donc $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{xe^x - 1 \times e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier une fonction avec l'exponentielle :*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

$f = u \times v$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^x$ Donc $f = u'v + v'u$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$

Donc $f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times (x+1) = (1 + x + 1)e^x = (x+2)e^x$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

$\forall x$ $e^x > 0$ Donc $f'(x)$ est du même signe que $x + 2$. Soit (E) : $x + 2 = 0$

$S(E) = \{-2\}$

$f(-2) = -3e^{-2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	↘		$f(-2)$	↗	

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

$y = 2x + 1$

V. Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$, $k \in R$.

Propriété : La fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est dérivable sur R et sa dérivée a pour expression ke^{kt}

$(e^{3t})' = 3e^{3t}$

$(e^{-5t})' = -5e^{-5t}$

Propriété :

- Si $k > 0$: la fonction $t \to e^{kt}$ est croissante
- Si $k > 0$: la fonction $t \to e^{kt}$ est décroissante