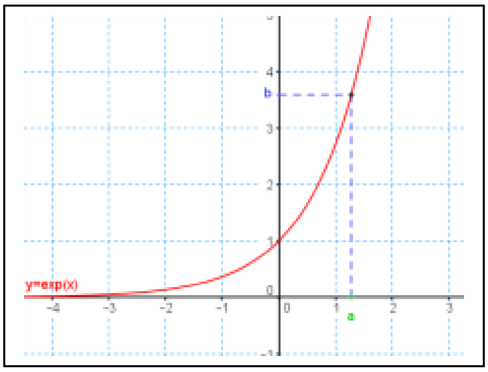
Fonction logarithme népérien.

I. Définition.



La fonction exponentielle est continue, positive et strictement croissante sur IR. Pour tout nombre $b > 0$, la droite qui a pour équation $y=b$ coupe la courbe représentative de la fonction exponentielle en un unique point. Donc le nombre b admet un unique antécédent par la fonction exp. On note ce nombre $a=ln(b)$.

Définition

On appelle <u>logarithme népérien</u> d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation (E) : $e^x = b$. On note ce nombre $ln(b)$.
La <u>fonction logarithme népérien</u>, notée ln, est la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par $ln : x \mapsto ln(x)$.

<u>*Exemple :*</u>
L'équation (E) : $e^x = 3$ *admet une unique solution. Il s'agit de* $x =$..... .
A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée : $x \approx$.......... .
De même $ln(1) =$ .... ; $ln(e) =$ .... ; $ln(0) =$ ....
Attention :...
....

Propriété

- $a= ln(b)$ avec $b > 0 \Leftrightarrow e^a = b$.
- Pour tout x, $ln(e^x) = x$.
- Pour tout x positif, $e^{ln(x)} = x$.

<u>*Exemple :*</u> $e^{ln(2)} =$ .... ; $ln(e^5) =$ .... ; $ln(e^{-3}) =$ .... ; $e^{ln(-2)} =$ .... ;

Propriété (admise)

- $ln(b) = ln(a) \Leftrightarrow b = a$.
- $ln(b) < ln(a) \Leftrightarrow b < a$.

☑*Savoir faire : Savoir résoudre des équations avec du* ln *:*
Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

$(E_1) : ln(x) = 2$ $\quad (E_2) : e^{x+1} = 5$ $\quad (E_3) : 3ln(x) - 4 = 8$ $\quad (I_1) : \ln(6x-1) \geq 2$ $\quad (I_2) : e^x + 5 > 4e^x$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

II. Propriétés de la fonction logarithme népérien.

Propriété

Pour réel x et y strictement positif, on a : $ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$.

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.
On en déduit :

Propriété

Pour réel x et y strictement positif, on a :

- $ln(\frac{1}{x}) = - ln(x)$
- $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$
- $ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} ln(x)$
- $ln(x^n) = n\ ln(x)$

☑*Savoir faire : Savoir simplifier une écriture avec du* $\ln$ *:*

$A = \ln\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln\left(3+\sqrt{5}\right)$ $\qquad B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$ $\qquad C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

☑*Savoir faire : Savoir résoudre une équation du type (E) :* $a^x = b$ *:*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation : (E) :* $5^x = 3$.

....

....

....

☑*Savoir faire : Savoir résoudre une équation du type (E) :* $x^a = b$ *:*

Résoudre dans $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ *l'équation : (E) :* $x^5 = 100$.

....

....

....

☑*Savoir faire : Savoir déterminer une augmentation répétée connaissant l'augmentation globale :*

6 augmentations successives de t % correspondent à une augmentation globale de 30 %.
Donner une valeur approchée de t.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

III. Etude de la fonction logarithme népérien

Propriété (admise)

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur] 0 ; +∞ [et ($ln(x)$)' = ...

☑Savoir faire : Savoir dériver une fonction avec la fonction ln :

Dériver les fonctions suivantes après avoir déterminer leur ensemble de définition :

- $f(x) = 2x^3 - x + 5ln(x)$
- $g(x) = xln(x)$
- $h(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

....
....
....
....
....

Pour tout réel x > 0, (ln(x))' = ...> 0 Donc la fonction ln est .... sur ....
De plus (ln(x))'' = ... Donc la dérivée de la fonction ln est .... sur ....
Donc la fonction ln est .... sur ....

Propriété

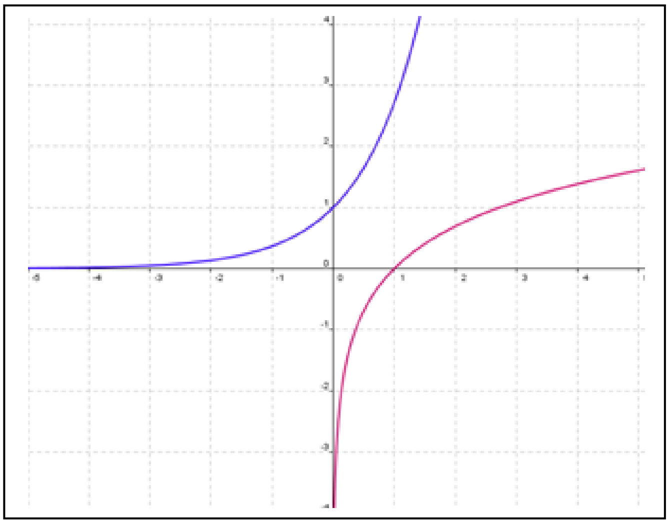
La fonction logarithme népérien est strictement croissante et concave sur] 0 ; +∞ [.

Propriété (admise)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

x	
Signes de ($ln(x)$)'	
Variations de ln	

x	
Signes de $ln(x)$	



Remarque : Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite qui a pour équation ....

Tangentes particulières

- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est......................... .... soit : ....
- Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est......................... .... soit : ....

☑Savoir faire : Savoir étudier une fonction avec la fonction ln :

On considère la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = xln(x) - x$. Etudier la fonction f.

....
....
....
....
....
....
....

x	
Signes de $f'(x)$	
Variations de f	

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction avec la fonction $\ln$:*

On considère la fonction f définie sur [1 ; 9] par $f(x) = 2x - 4\ln(x)$.

1. *Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.*

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2. *Etablir le tableau de variations de f.*

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

3. *Etudier la convexité de la fonction f.*

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

☑ *Métropole 2013 :*

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fausse en justifiant.

Question 1

Question 2

Sur $I =]0\,;\,+\infty[$, on définit la fonction f par

$$f(x) = 2x + 1 - \ln x.$$

PROPOSITION : f est une fonction convexe sur I.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Question 3

On définit sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$, $F(x) = 2x\ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	dériver$((2x) * \ln(x) - 2x + 5)$ $2 * \ln(x) + \dfrac{2 * x}{x} - 2$
2	simplifier $\left(2 * \ln(x) + \dfrac{2 * x}{x} - 2\right)$ $\ln(x^2)$

PROPOSITION : F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2\ln x$.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………