Fonction dérivée.

Joseph Louis Lagrange (1736 ; 1813) *introduit le mot « dérivé » pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.*

I. Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est <u>dérivable</u> sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée <u>fonction dérivée</u> de f et se note f'. $f' : x \to f'(x)$.

II. Fonctions dérivées des fonctions de référence.

Propriété : La dérivée de la fonction carrée, $f : x \to x^2$ est la fonction $f' : x \mapsto 2x$

Démonstration exigible :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2-\cancel{a^2}}{h} = \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}$

$= 2a+h$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a+h = 2a$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$

Propriété : La dérivée de la fonction inverse, $f : x \to \frac{1}{x}$ est la fonction $f' : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$

Démonstration exigible :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}$

Donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$ Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{-1}{a^2}$

On pourrait montrer de même que :

- $f : x \to k$, ($\forall k \in R$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 0$
- $f : x \to mx$, ($\forall m \in R$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto m$
- $f : x \to x^n$, ($\forall n \in N^*$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto nx^{n-1}$
- $f : x \to \frac{1}{x^n}$, ($\forall n \in N^*$) est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$
- $f : x \to \sqrt{x}$, est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

☺ Cas particulier de la fonction valeur absolue.

Définition : La fonction valeur absolue $x \to |x|$ est définie sur R par :

♦ Si x est positif, $|x| = x$ ♦ Si x est positif $|x| = -x$

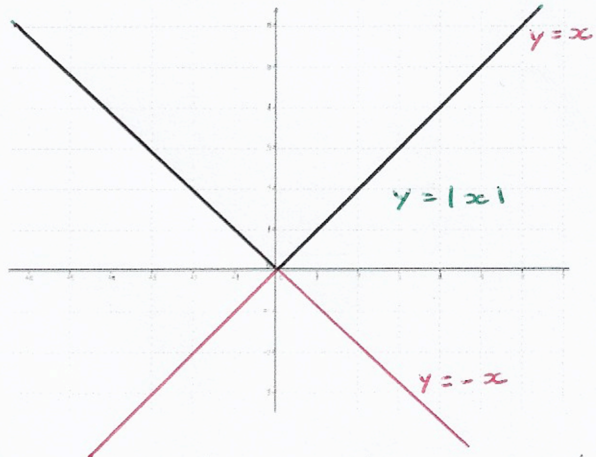
exemple : $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|-10| = 10$

remarque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$,

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de f	$+$	0	$+$



Remarques :

La courbe de la fonction valeur absolue est composée de 2 demi-droites, on dit que c'est une fonction affine par morceau.

Propriété : La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$. si $h > 0$ $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$, donc $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$

. si $h < 0$ $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, donc $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$

Donc f n'est dérivable en 0.

III. Opération sur les fonctions dérivées.

☺ Dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$. Déterminons sa fonction dérivée.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 + (a+h) - (a^2 + a) = \cancel{a^2} + 2ah + h^2 + \cancel{a} + h - \cancel{a^2} - \cancel{a}$

Donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{h^2 + 2ah + h}{h} = \frac{\cancel{h}(h + 2a + 1)}{\cancel{h}} = h + 2a + 1$, Donc

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} h + 2a + 1$, donc $f'(x) = 2x + 1$, f est dérivable

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$, on a $f(x) = x^2 + x$.

On a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$, on remarque que

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est dérivable sur I et on a : $(u+v)' = u' + v'$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x^4$. Déterminons sa fonction dérivée.

$f = u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^4$, donc $f' = u' + v'$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 4x^3$, Donc $f'(x) = 2x + 4x^3$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et k un nombre réel alors la fonction ku est dérivable sur I et on a : $(k u)' = k u'$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Déterminons $f'(x)$.

$f'(x) = 6x - 2$, $(3x^2)' = 3 \times (x^2) = 3 \times 2x = 6x$

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u.v$ est dérivable sur I et on a : $f(x) = u(x) \times v(x) = (u \times v)' = u' \times v + v' \times u$

Démonstration exigible :

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) \times v(a+h) - v(a) \times v(a)}{h} =$

$\left[\frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h)}{h}\right] + \left[\frac{u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}\right]$

$= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h - v(a)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \lim_{h \to 0} \times a + h + u(a) \times \lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$

$= u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$

Propriété : Soit u une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u}{u^2}$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$. Déterminons $f'(x)$.

$f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$, $f = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 3x^2 + 1$, Donc $f' = \frac{-u'}{u^2}$

avec $u'(x) = 6x$, donc $f'(x) = \frac{-6x}{(3x^2+1)^2}$

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, v ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - v' . u}{v^2}$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$. Déterminons $f'(x)$.

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 5$ et $v(x) = x^2 + 1$, donc $f' = \frac{u' . v - u' . v}{v^2}$

avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$, Donc $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x \times (2x-5)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-2x^2 + 10x + 2}{(x^2+1)^2}$

☑ *Savoir-faire : Savoir dériver des sommes, produits ou quotients de fonctions :*

Détermine les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

- $f_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $f'_1(x) = 12x^2 - 6x + 2$
- $f_2(x) = (5x^2 + 1)(x^2 + 2x + 1)$

$f_2 = u \times v$ avec $u(x) = 5x^2 + 1$ et $v(x) = x^2 + 2x + 1$

Donc $f'_2 = u'v + v'u$ avec $u'(x) = 10x$ et $v'(x) = 2x + 2$

Donc $f'_2(x) = 10x \times (x^2 + 2x + 1) + (2x + 2)(5x^2 - 1)$

$f'_2(x) = 20x^3 + 30x^2 + 12x + 2$

- $f_3(x) = \frac{2x-5}{3x^2+4}$, $f_3 = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 5$ et $v(x) = 3x^2 + 4$

Donc $f'_3 = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 6x$

Donc $f'_3(x) = \frac{2 \times (3x^2 + 4) - 6x(2x - 5)}{(3x^2+4)^2} = \frac{-6x^2 + 30x + 8}{(3x^2+4)^2}$

☺ Dérivée d'une fonction composée.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f(mx+p)$ est dérivable sur I et on a : $[f(mx+p)]' = m \times f'(mx+p)$

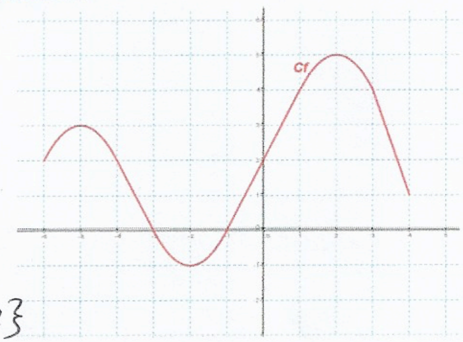
Exemple : $x \mapsto 3x+2 \xrightarrow{c\,:\, x \mapsto x^2} (3x+2)^2$, $f(x) = 3x+2)^2 = c(3x+2)$
$\because f(x) = 9x^2 + 12x + 4$, $f'(x) = 18x + 12$ $\qquad c(x) = x^2$
$\because f(x) = c(3x+2)$, $f'(x) = 3 \times c'(3x+2) = 3 \times 2x(3x+2)$ $\qquad c'(x) = 2x$
$= 18x + 12$

IV. Applications des fonctions dérivées.

☺ Fonctions dérivées et sens de variation.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement le signe d'une dérivée :*

On donne ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f.



1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

♦ $f(x) = 0$.

Les solutions de $f(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et $y = 0$.
$S(E) = \{-3 ; -1\}$

♦ $f'(x) = 0$.

On cherche les points pour lesquels la tangente aura pour coef. directeur 0. $S = \{-5 ; -2 ; 2\}$

2) Complète les tableaux suivants :

x	-6		-5		-2		2		4
Signes de $f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

x	-6		-5		-2		2		4
Variations de f	2	↗	3	↘	−1	↗	5	↘	1

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

♦ Si $\forall\, x \in$ I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est croissante sur I

♦ Si $\forall\, x \in$ I, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est decroissante sur I

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction polynôme du 3° degré :*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

1) Déterminer $f'(x)$: $6x^2 + 6x - 12$

2) Déterminer le signes de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

$f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$
$f'(x) = 6(x+2)(x-1)$
$\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 324 = (18)^2$
$\Delta > 0$ $f'(x) = 0$ a deux solutions
$x_1 = \frac{-6-18}{12} = -2$ $\qquad x_2 = \frac{-6+18}{12} = 1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signes de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
		↗	24	↘	−3	↗	

☑ Savoir-faire : Savoir étudier une fonction rationnelle :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

On pose $(E) : x^2 - 2x = 0$, $(E) \Leftrightarrow x(x-2) = 0$ $S(E) = \{0 ; 2\}$

Donc $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) Déterminer $f'(x)$: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2x}$ $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = x^2 - 2x$

Donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x - 2$

Donc $f'(x) = \dfrac{1 \times (x^2 - 2x) - (2x-2) \times (x+1)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2x - 2x - 2}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{-x^2 - 2x - 2}{(x^2-2x)^2}$

3) Déterminer le signes de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

On pose $(E_1) : -x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 12$

$x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{-2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{3}$ $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{-2} = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = -1 - \sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
		↘		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

☺ Fonctions dérivées et extremums.

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum en $x = c$.

Exemple : La fonction f définie sur R par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ admet-elle un extremum ?

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5 = 6x - 2$ $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{3}$

Donc f a un extremum local en $\frac{1}{3}$

Attention* f a un extremum local en $\frac{1}{3}$ * la condition d'allignement

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

☺ Étudier la position relative de deux courbes.

Exemple : Soit f et g deux fonctions définies sur R par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.

1) Montre que 2 est solution de l'équation $x^3 + 5x - 18 = 0$

2) Étudie la position relative de Cf et de Cg.