Fonctions.

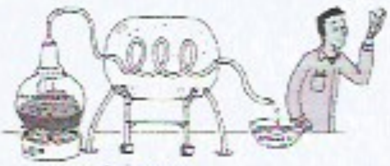
I. Notion de Fonction.

Définition

Une fonction est un procédé qui a un nombre fait correspondre un unique autre nombre.

Remarque : c'est une définition peu explicite, mais on ne peut pas faire mieux.

antécédent : x



machine f : $x \longmapsto f(x)$.

image : $f(x)$

Définition

Si on transforme un nombre x par une fonction f, on dit que le nombre obtenu est l'image du nombre x et on le note $f(x)$. On dit aussi que x est un antécédent de $f(x)$.

Remarque : Attention à ne pas confondre $f(x)$, qui est un nombre, l'image du nombre x et f qui est le nom de la fonction, le nom de la machine.

Remarque : Un nombre a une seule image mais un nombre peut avoir aucun, un, ou plusieurs antécédents.

II. Fonctions définies par :

a) Une expression.

Exemple n°1 : On considère la fonction f qui a pour expression $f(x)= x^2$. (on trouve des fois dans des livres la notation $f : x \longmapsto x^2$, qui se lit : « La fonction f qui a un nombre x associe le nombre x^2).

Savoir-faire

Soit f la fonction qui a pour expression $f(x)= x^2$. Calcule l'image de 0 ; 3 ; -4 et 0,1 par la fonction f.

$f(0) = 0^2$ Donc $f(0) = 0$ Donc l'image de 0 par la fonction f est 0	$f(3) = 3^2$ Donc $f(3) = 9$ Donc l'image de 3 par la fonction f est 9	$f(-4) = (-4)^2$ $f(-4) = 16$ Donc -4 a pour image 16 par la fonction f.	$f(0,1) = 0,1^2$ $f(0,1) = 0,01$ Donc 0,01 est l'image de 0,1 par la fonction f.

Savoir-faire

Soit f la fonction qui a pour expression $f(x)= x^2$. Détermine les antécédents de 25 ; 0 ; 3 et -4 par f.

On cherche tous les nombres x qui vérifient $f(x)= 25$, c'est-à-dire les nombres x qui vérifient $x^2=25$ Il y a deux solutions 5 et (-5) Donc 25 a 2 antécédents par la fonction f qui sont (-5) et 5	Les antécédents de 0 vérifient l'égalité $x^2 = 0$. Cette équation a 1 solution qui est 0 Donc 0 a un antécédent qui est 0	Les antécédents de 3 sont solutions de l'équation $x^2 = 3$. Donc 3 a 2 antécédents qui sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$	L'équation $x^2 = -4$. Donc l'équation n'a pas de solution donc -4 n'a pas d'antécédent par f.

A **Remarque :** On peut représenter tous les résultats précédents dans un tableau. avec tableur (B2 = B*B ou B^2)

x	-5	-3	-2	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	25	9	4	1	0,25	0,01	0	0,01	0,25	1	4	9	16	25.

Savoir-faire

On considère la fonction g qui a pour expression $g(x) = x^2 - 2x$. **1.** Calcule l'image de 4 ; -3 et $\sqrt{2}$ par g.

$g(4) = 4^2 - 2\times4 = 8$
Donc l'image de 4 par g est 8

$g(-3) = (-3)^2 - 2\times(-3) = 15$
Donc l'image de -3 par g est 15

$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2}$.
Donc l'image de $\sqrt{2}$ est $2 - 2\sqrt{2}$

Savoir-faire

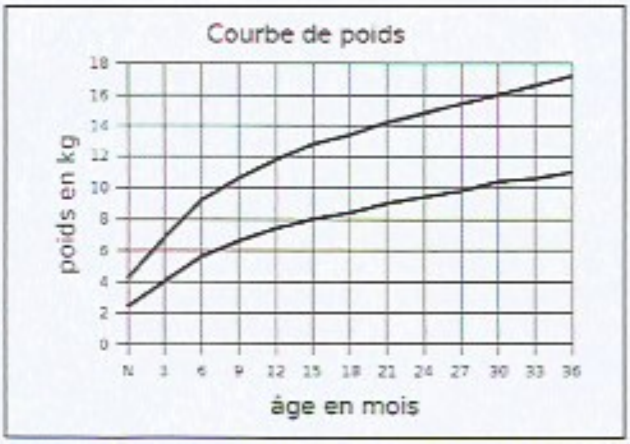
2. Montre que 7 est un antécédent de 35 par la fonction g.

$g(7) = 7^2 - 2\times7 = 49 - 14 = 35$. Donc 7 est 1 antécédent de 35 par la fonction g.

Savoir-faire

3. Détermine tous les antécedents de 0 par la fonction g.

b) Fonctions définies par une courbe.



Voici un extrait du carnet de santé donné à chaque enfant

Les deux courbes indiquent les limites basses et hautes de l'évolution du poids d'un enfant : sa courbe de poids doit a priori se situer entre ces deux courbes.

On utilise ces courbes pour définir deux fonctions, la fonction f qui, à un âge en mois, associe le poids minimum en kg et la fonction g qui, à un âge en mois, associe le poids maximum en kg.

Le poids minimum d'un enfant de 15 mois est 8 Kg en langage mathématique l'image de 15 par f est 8. $f(15) = 8$

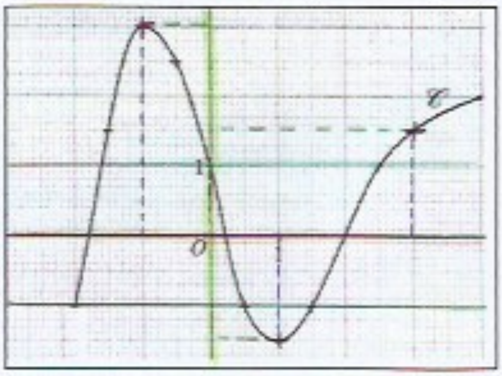
Le poids maximum d'un enfant de 21 mois est 14 Kg en langage mathématique $g(21) = 14$.

Un enfant pèse au maximum 16 kg lorsqu'il a 30 m. en langage mathématique par la fonction g l'antécédent de 16 est 30.

x	3	12	15	24	30	34,5
$f(x)$	4	7,5	8	9,5	10,5	11
$g(x)$	7	12	13	15	16	17

Lorsqu'on nous donne une courbe qui représente une fonction, on peut l'utiliser pour lire des images et des antécédents.

Une courbe nous permet de définir une fonction en donnant comme image d'un nombre x, l'ordonnée du point de la courbe qui a pour abscisse le nombre x. On écrit aussi que tous les points de la courbe ont leurs coordonnées de la forme $(x ; f(x))$.



L'image de 1 par la fonction f est -1,5. $f(1) = -1,5$

L'image de 3 par la fonction f est 1,5 $f(3) = 1,5$

L'image de -1 par la fonction f est 3 $f(-1) = 3$

L'image de 0 par la fonction f est 1 $f(0) = 1$

Les antécédants de 1 sont -1,5 ; 0 et 2,5

Les antécédants de -1 sont -2 ; 0,5 et 1,5

Les antécédants de 5 ~~sont~~ il n'y en a pas.

Les antécédants de 0 sont -1,8 ; 0,2 et 2

III. Représenter graphiquement une fonction :

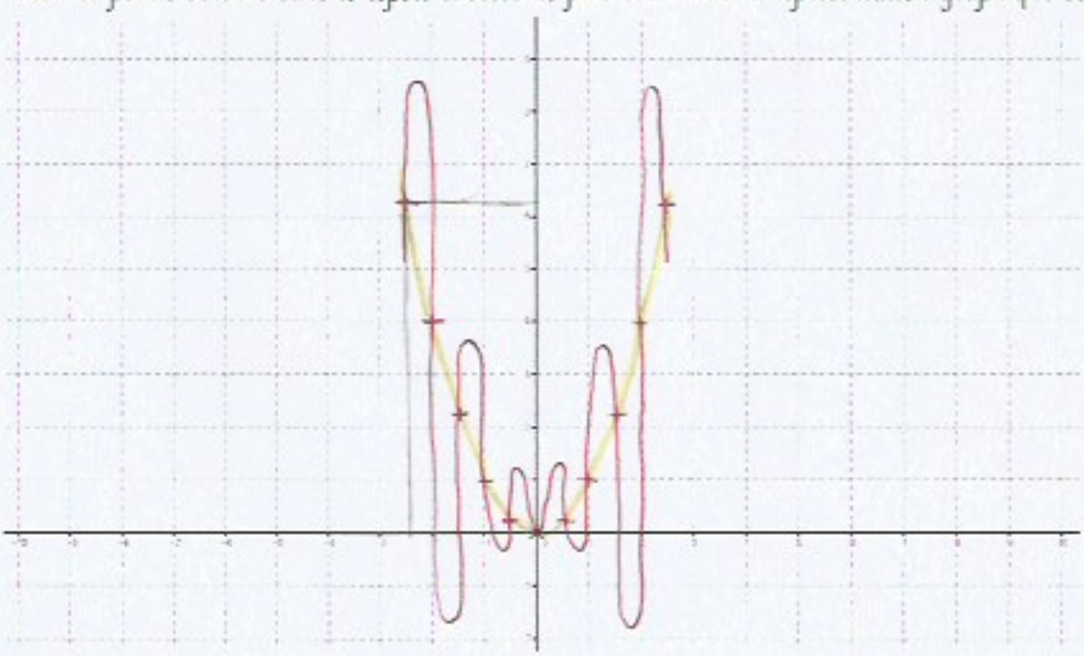
Définition

Représenter graphiquement une fonction, (ou construire la représentation graphique d'une fonction) signifie placer dans un repère tous les points qui ont leurs coordonnées de la forme $(x ; f(x))$.

☺ **Exemple :** On considère la fonction f qui a pour expression $f(x) = x^2$. Complète le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
2	$f(x) = x^2$	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

Placer les points obtenus dans le repère ci-dessous, puis construire la représentation graphique de f.

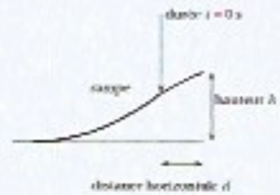


Remarque :

On sait que la courbe passe par les points placés mais on ne connait pas son évolution entre deux points. Il faudrait construire tous les points un par un, ce qui n'est pas possible. Donc on utilise un traceur de courbes. Le traceur de courbes représente cette fonction : qui à $x \longmapsto x^2$ par la courbe jaune.

Brevet

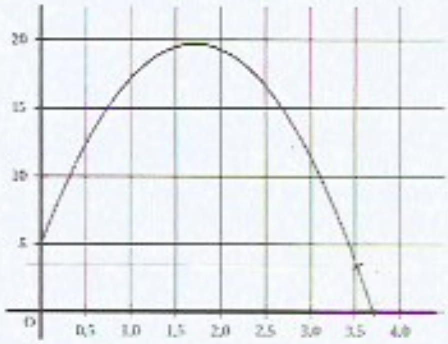
Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Gaëtan a effectué un saut record en moto. Le saut commence dès que Gaëtan quitte la rampe.



On note t la durée (en secondes) de ce saut. La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction h suivante :

$h:\ t \rightarrow (-5t - 1{,}35)(t - 3{,}7)$.

Voici la courbe représentative de cette fonction h.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifie en utilisant soit le graphique soit des calculs.

1. En développant et en réduisant l'expression de h on obtient

$h(t) = -5t^2 - 19{,}85t - 4{,}995$.

2. Lorsqu'il quitte la rampe, Gaëtan est à 3,8 m de hauteur.

3. Le saut de Gaëtan dure moins de 4 secondes.

4. Le nombre 3.5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h.

5. Gaetan a obtenu la hauteur maximale avant 1,5 seconde.

1) $h(t) = (-5t - 1{,}35)(t - 3{,}7)$

$h(t) = -5t^2 + 17{,}15t + 4{,}995$

L'affirmation est fausse.

2) Il quitte la rampe lorsque $t = 0$, $h(0) = 5$. Donc il est à 5 m de hauteur

L'affirmation est fausse.

3) Oui $h(3{,}7) = 0$. Il touche le sol avant 4 secondes.

L'affirmation est vraie.

4) $h(3{,}5) = (-5 \times 3{,}5 - 1{,}35) \times (3{,}5 - 3{,}7)$

$= -18{,}85 \times (-0{,}2) = 3{,}77$.

L'affirmation est vraie.

5) fausse, la hauteur maximale est obtenue entre 1,5 et 2 secondes.

Brevet

Avec des ficelles de 20 cm, on construit des polygones comme ci-dessous :

Méthode de construction des polygones

Étape 1		On coupe la ficelle de 20 cm en deux morceaux.
Étape 2	morceau n° 1 morceau n° 2	On sépare les deux morceaux.
Étape 3		• Avec le « morceau n° 1 », on construit un carré. • Avec le « morceau n° 2 », on construit un triangle équilatéral.

Partie 1 :

Dans cette partie, on découpe à l'étape 1 une ficelle pour que le « morceau n° 1 » mesure 8 cm.

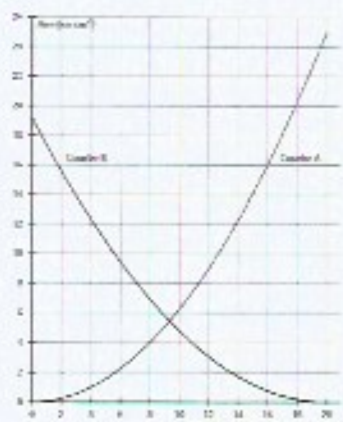
1. Dessiner en grandeur réelle les deux polygones obtenus.
2. Calculer l'aire du carré obtenu.
3. Estimer l'aire du triangle équilatéral obtenu en mesurant sur le dessin.

Partie 2 :

Dans cette partie, on cherche maintenant à étudier l'aire des deux polygones obtenus à l'étape 3 en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».

1. Proposer une formule qui permet de calculer l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».
2. Sur le graphique ci-dessous :
   - la courbe A représente la fonction qui donne l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau n° 1 » ;
   - la courbe B représente la fonction qui donne l'aire du triangle équilatéral en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».

Graphique représentant les aires des polygones en fonction de la longueur du « morceau n° 1 »



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes. Aucune justification n'est attendue.

a. Quelle est la longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir un triangle équilatéral d'aire 14 cm² ?

b. Quelle est la longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir deux polygones d'aires égales ?

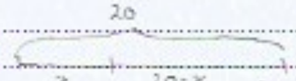
1)

2) L'aire du carré $= 2 \times 2 = 4\,cm^2$

L'aire du triangle est

$\frac{h \times c}{2} = \frac{3{,}5 \times 4}{2} = 7\,cm^2$

1)



$\mathcal{A}_{carré} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

2) a. $x = 3$

b. Le point d'intersection des 2 courbes a une abscisse proche de 9,5.