IV. Fonctions affines :

a) Définition.

Définition

On appelle fonction affine une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = m(x) + p$

m s'appelle le coefficient directeur et p s'appelle l'ordonnée à l'origine

☺ **Exemples :**

☺ La fonction f qui a pour expression $f(x) = 3x + 2$ est une fonction affine.

Le coefficient directeur est $m = 3$ et l'ordonnée à l'origine est $p = 2$

☺ La fonction g qui a pour expression $g(x) = \frac{-5x-7}{2} = \frac{-5}{2}x - \frac{7}{2}$ est une fonction affine.

Le coefficient directeur est $m = \frac{-5}{2}$ et l'ordonnée à l'origine est $p = \frac{-7}{2}$

☺ La fonction h qui a pour expression $h(x) = x^2$ n'est pas une fonction affine.

☺ La fonction k qui a pour expression $k(x) = -x$ est une fonction affine

Le coefficient directeur est $m = -1$ et l'ordonnée à l'origine est $p = 0$

b) Représentation graphique.

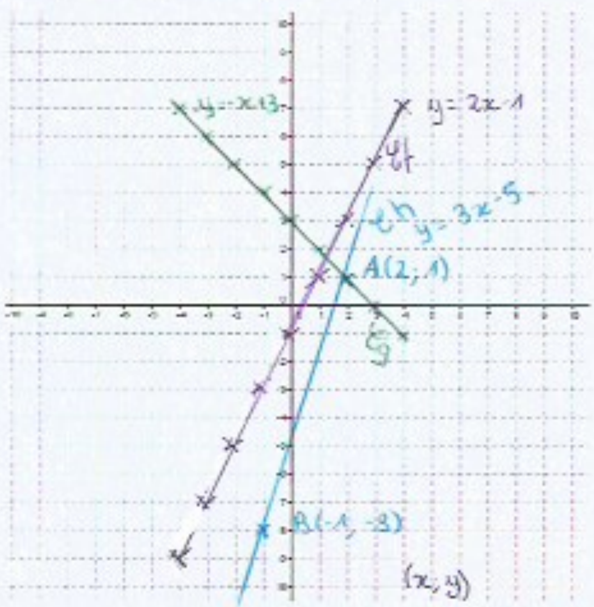
☺ **Exemple :** On considère la fonction f qui a comme expression $f(x) = 2x - 1$. Complète le tableau de valeurs.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$f(x) = 2x-1$	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7

On considère la fonction g qui a comme expression $g(x) = -x + 3$. Complète le tableau de valeurs.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x) = -x+3$	7	6	5	4	3	2	1	0	-1

Place les points obtenus dans le repère ci-contre. En vert ceux de la courbe représentative de f. en rouge ceux de la courbe représentative de g.



On remarque que :
pour les deux fonctions, les points placés semblent alignés. Sans plus d'informations, on ne peut rien faire de plus (on se souvient de la fonction $x \mapsto x^2$ page 63). ☺ Heureusement :

Propriété (admise)

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Application : Construire la courbe représentative de la fonction h qui a pour expression $h(x) = 3x - 5$.

$h(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$ $h(-1) = 3 \times (-1) - 5 = -8$

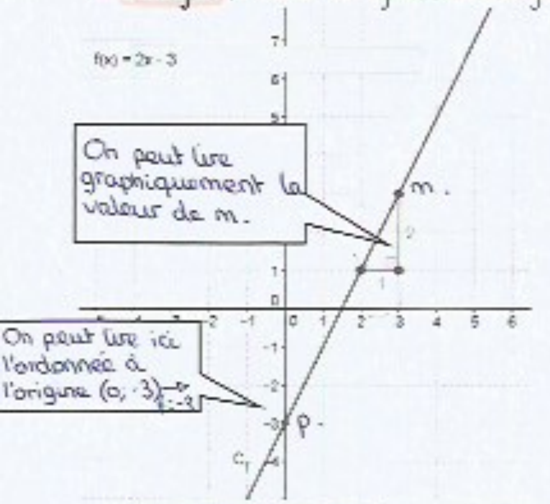
Donc $A(2;1) \in \mathcal{C}_h$ Donc $B(-1;-8) \in \mathcal{C}_h$ h est une fonction affine

Donc par propriété $\mathcal{C}_h$ est une droite. C'est la droite (AB).

$\in$ = "appartient à"

Remarque : On peut vérifier que la représentation graphique d'une fonction affine est correcte.

☺ **Exemple** : Voici la représentation graphique de la fonction f qui a pour expression $f(x) = 2x - 3$.



La fonction f est une fonction affine. Son coefficient directeur est $m = 2$ et son ordonnée à l'origine est $p = -3$.

☺ $f(0) = 2\times0-3 = -3$ Donc le point de coordonnées $(0\,;-3)$ appartient à la représentation graphique de f.

☺ $f(1) - f(0) = -1-(-3) = 2$

$f(2) - f(1) = 1-(-1) = 2$

$f(3) - f(2) = 3-1 = 2$

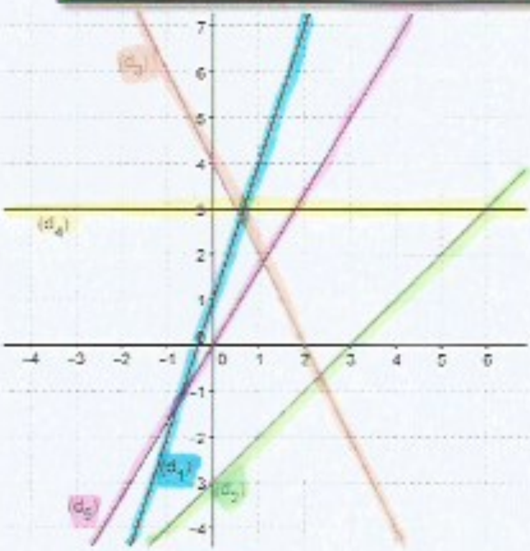
Pour tout nombre a :

$f(a+1) - f(a) = 2(a+1)-3-(2a-3) = 2a+2-3-2a+3 = 2$

On peut lire le coefficient directeur sur la représentation graphique.

Savoir-faire

Retrouve les expressions des fonctions affines qui ont été représentées graphiquement ci-dessous.



☺ La droite (d1) représente la fonction affine f_1 qui a pour expression $f_1(x) = 3x + 1$

☺ La droite (d2) représente la fonction affine f_2 qui a pour expression $f_2(x) = x - 3$

☺ La droite (d3) représente la fonction affine f_3 qui a pour expression $f_3(x) = -2x + 4$

☺ La droite (d4) représente la fonction affine f_4 qui a pour expression $f_4(x) = 3$

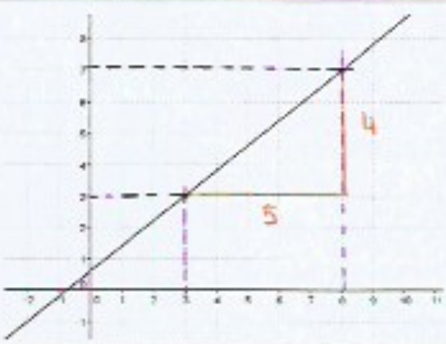
☺ La droite (d5) représente la fonction affine f_5 qui a pour expression $f_5(x) = \frac{5}{3}x -$

Propriété

Soit f une fonction affine d'expression $f(x) = mx + p$ alors pour tout nombre a et b ($a \neq b$) On a : $m = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

Savoir-faire

Détermine par lecture graphique le coefficient directeur de la fonction affine représentée ci-dessous.



$f(x) = mx + p$

$f(3) = 3$ et $f(8) = 7$

$m = \dfrac{f(8)-f(3)}{8-3} = \dfrac{7-3}{8-3} = \dfrac{4}{5}$

Donc $f(x) = \dfrac{4}{5}x + p$

et $f(3) = 3$

Donc $\dfrac{4}{5}\times 3 + p = 3$

Donc $\dfrac{12}{5} + p = 3$ Donc $p = 3 - \dfrac{12}{5} = \dfrac{15}{5} - \dfrac{12}{5} = \dfrac{3}{5}$

Donc $f(x) = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}$

Savoir-faire

Soit f une fonction affine telle que l'image de 3 soit -5 et que -4 soit un antécédent de 9.
Retrouve l'expression de la fonction f.

La fonction f est une fonction affine donc son expression est de la forme ....

On a $f(3) = -5$ et $f(-4) = 9$. donc $m = \frac{f(3) - f(-4)}{3 - (-4)} = \frac{-5-9}{3+4} = \frac{-14}{7} = -2$

De plus $f(3) = -5$ et $f(x) = -2x + p$.
Donc $-2 \times 3 + p = -5 \Rightarrow -6 + p = -5 \Rightarrow p = 1$.
Donc $f(x) = -2x + 1$.

Remarque : Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine

c) Fonctions linéaires.

Définition

On appelle fonction linéaire une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = mx$ $(p = 0)$.

Propriété

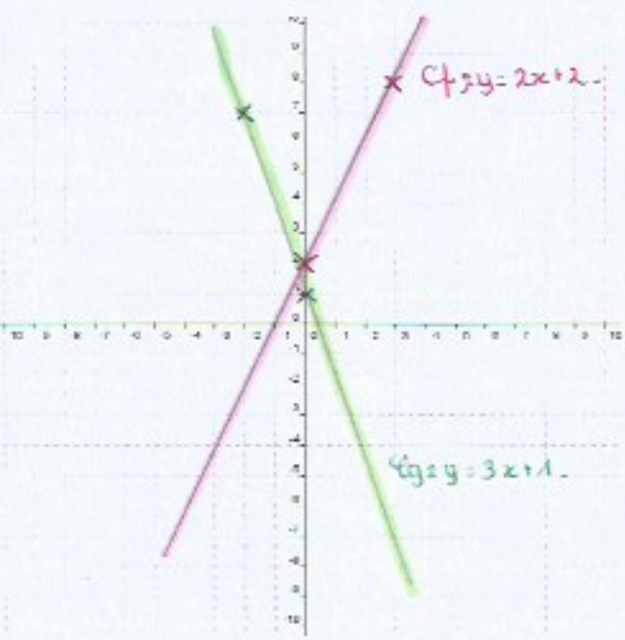
Une fonction linéaire est une fonction affine, sa représentation est une droite qui passe par $(0;0)$.
Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

IV. Exercices type brevet :

Brevet

f et g sont deux fonctions affines définies par : $f(x) = 2x + 2$ et $g(x) = -3x + 1$.

1) Dans le repère ci-dessous, tracer les représentations graphiques de f et g.
2) Résoudre l'équation (E) : $2x + 2 = -3x + 1$. Que représente la solution de cette équation ?



1) $f(x) = 2x + 2$
$f(0) = 2$ Donc $A(0;2) \in C_f$
$f(3) = 8$ Donc $B(3;8) \in C_f$
f est une fonction affine donc C_f est une droite, c'est la droite (AB).

$g(x) = -3x + 1$
$g(0) = 1$ Donc $C(0;1) \in C_g$
$g(-2) = 7$ Donc $D(-2;7) \in C_g$

2) (E) $2x + 2 = -3x + 1$
(E) $\Leftrightarrow 5x = -1$
(E) $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$
$\frac{-1}{5}$ est l'abscisse du point d'intersection de C_f et C_g.

Brevet

Un vidéoclub propose différents tarifs pour l'emprunt de DVD.

– **Tarif A :** 4 € par DVD emprunté. – **Tarif B :** 2,50 € par DVD emprunté, après avoir payé un abonnement de 18 €.

– **Tarif C :** abonnement de 70 € pour un nombre illimité de DVD.

1. Compléter le tableau suivant indiquant le prix à payer pour 5 ou 15 ou 25 DVD, aux tarifs A, B ou C.

	5 DVD	15 DVD	25 DVD
Coût au tarif A	20 €	60 €	100 €
Coût au tarif B	30,5 €	55,5 €	80,5 €
Coût au tarif C	70 €	70 €	70 €

2. On note x le nombre de DVD empruntés. On admet que les trois tarifs peuvent être exprimés à l'aide des fonctions définies par les expressions suivantes : $f(x) = 2,5x + 18$; $g(x) = 70$; $h(x) = 4x$

a) Associer à chaque tarif la fonction qui lui correspond.

b) Avec le tarif B, Zoé a payé 48€. Combien a-t-elle prit de DVD ?

3. Tracer dans un même repère les représentations graphiques de ces trois fonctions.

On prendra en abscisse 1 carreau pour 2 DVD et en ordonnée 1 carreau pour 5 €.

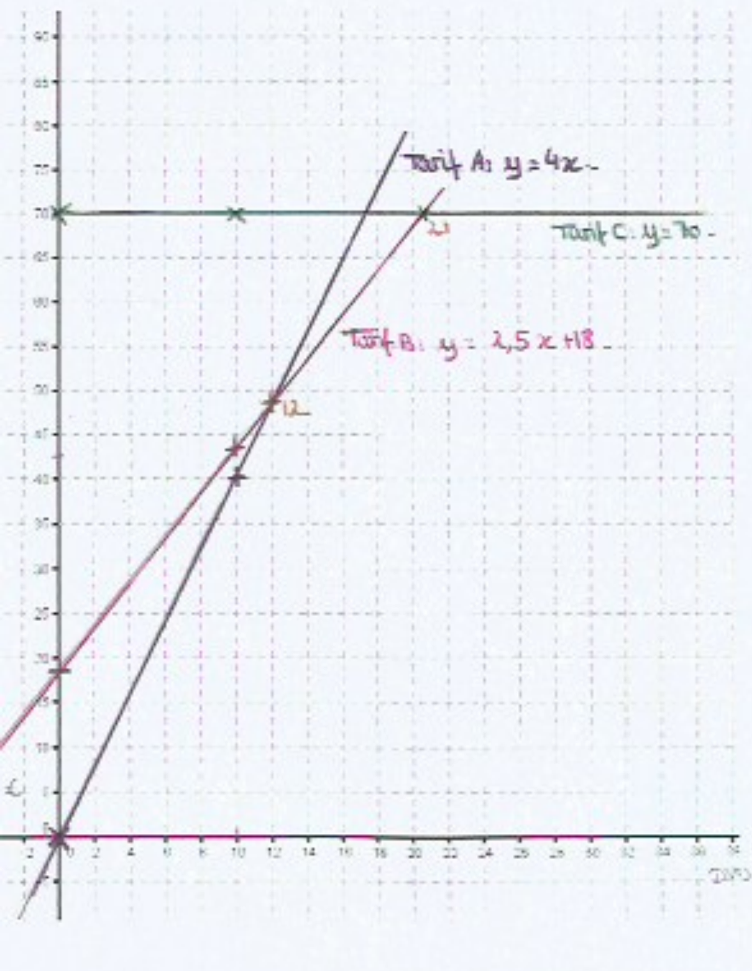
4. a) Résoudre l'équation : $4x = 2,5x + 18$. Interpréter le résultat.

b) Mettre en évidence comment trouver la solution de cette équation sur le graphique en utilisant des pointillés.

5. a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $70 > 2,5x + 18$, en laissant apparents les traits de construction.

b) Retrouver ensuite le résultat par le calcul.

6. Synthèse : donner le tarif le plus intéressant selon le nombre de DVD empruntés.



2) a- Tarif A: $h(x) = 4x$

Tarif B $f(x) = 2,5x + 18$

Tarif C : $g(x) = 70$.

b- (E) $2,5x + 18 = 48$

(E) ⟺ $2,5x = 30$

(E) ⟺ $x = \frac{30}{2,5} = \frac{60}{5} = 12$.

Zoé a pris 12 DVD.

3) • $h(x) = 4x$

$h(0) = 0$ Donc $A(0,0) \in C_h$

$h(10) = 40$ Donc $B(10,40) \in C_h$.

h est une fonction affine donc Ch est une droite.

• $f(x) = 2,5x + 18$

$f(0) = 18$ Donc $C(0, 18) \in C_f$

$f(10) = 43$ Donc $D(10, 43) \in C_f$.

f est une fonction affine donc Cf est une droite.

• $g(x) = 70$.

$g(0) = 70$ Donc $E(0, 70)$ Cg

$g(10) = 70$ Donc $F(10; 70)$ Cg

g est une fonction affine donc Cg est une droite.

4) a- (E) $4x = 2,5x + 18$

(E) ⟺ $1,5x = 18$

(E) ⟺ $x = \frac{18}{1,5} = 12$.

b- Pour 12 DVD les tarifs A et B sont égaux.

5) a- $70 > 2,5x + 18$ pour $x < 21$

b- $70 > 2,5x + 18$

$2,5x + 18 < 70$

$2,5x < 52$

$x < \frac{52}{2,5}$

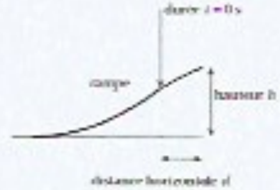
$x = 20,8$.

y = l'ordonnée ; 4x abrisse

6) Entre 0 et 12 DVD, le tarif le moins cher est le A.

Brevet

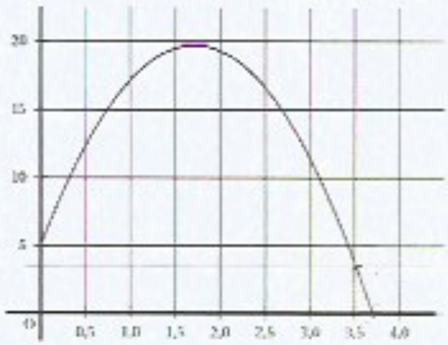
Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Gaëtan a effectué un saut record en moto. Le saut commence dès que Gaëtan quitte la rampe.



On note t la durée (en secondes) de ce saut. La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction h suivante :

$h : t \rightarrow (-5t - 1{,}35)(t - 3{,}7)$.

Voici la courbe représentative de cette fonction h.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifie en utilisant soit le graphique soit des calculs.

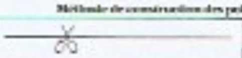
1. En développant et en réduisant l'expression de h on obtient
$h(t) = -5t^2 - 19{,}85t - 4{,}995$.
2. Lorsqu'il quitte la rampe, Gaëtan est à 3,8 m de hauteur.
3. Le saut de Gaëtan dure moins de 4 secondes.
4. Le nombre 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h.
5. Gaetan a obtenu la hauteur maximale avant 1,5 seconde.

1) $h(t) = (-5t - 1{,}35)(t - 3{,}7)$
$h(t) = -5t^2 + 17{,}15t + 4{,}995$
L'affirmation est fausse.
2) Il quitte la rampe lorsque $t = 0$, $h(0) = 5$. Donc il est à 5 m de hauteur.
L'affirmation est fausse.
3) Oui $h(3{,}7) = 0$. Il touche le sol avant 4 secondes.
L'affirmation est vraie.
4) $h(3{,}5) = (-5 \times 3{,}5 - 1{,}35) \times (3{,}5 - 3{,}7)$
$= -18{,}85 \times (-0{,}2) = 3{,}77$
L'affirmation est vraie.
5) Fausse, la hauteur maximale est obtenue entre 1,5 et 2 secondes.

Brevet

Avec des ficelles de 20 cm, on construit des polygones comme ci-dessous.

Méthode de construction des polygones

Étape 1		On coupe la ficelle de 20 cm en deux morceaux.
Étape 2	morceau n°1 morceau n°2	On sépare les deux morceaux.
Étape 3		• *Avec le « morceau n° 1 »*, on construit un carré. • *Avec le « morceau n° 2 »*, on construit un triangle équilatéral.

Partie 1 :

Dans cette partie, on découpe à l'étape 1 une ficelle pour que le « morceau n° 1 » mesure 8 cm.

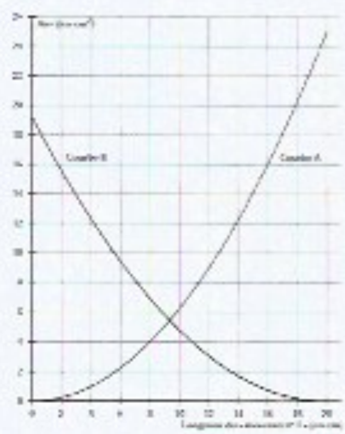
1. Dessiner en grandeur réelle les deux polygones obtenus.
2. Calculer l'aire du carré obtenu.
3. Estimer l'aire du triangle équilatéral obtenu en mesurant sur le dessin.

Partie 2 :

Dans cette partie, on cherche maintenant à étudier l'aire des deux polygones obtenus à l'étape 3 en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».

1. Proposer une formule qui permet de calculer l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».
2. Sur le graphique ci-dessous :
   - la courbe A représente la fonction qui donne l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau n° 1 » ;
   - la courbe B représente la fonction qui donne l'aire du triangle équilatéral en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».

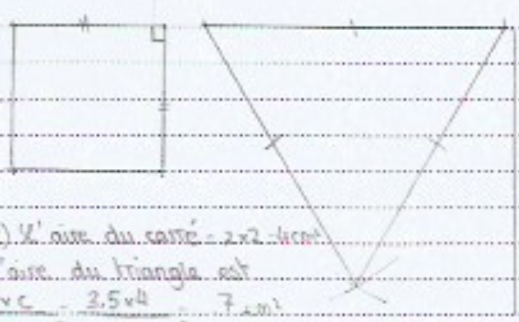
Graphique représentant les aires des polygones en fonction de la longueur du « morceau n° 1 »



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes. Aucune justification n'est attendue.

a. Quelle est la longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir un triangle équilatéral d'aire 14 cm² ?
b. Quelle est la longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir deux polygones d'aires égales ?

1)



2) L'aire du carré $= 2 \times 2 = 4$ cm²
L'aire du triangle est
$\frac{h \times c}{2} = \frac{3{,}5 \times 4}{2} = 7$ cm²

1) $\overbrace{x \quad 20 - x}^{20}$

$\mathcal{A}_{carré} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

2) a. $x = 3$
b. Le point d'intersection des 2 courbes a une abscisse proche de 9,5.