Chap 4 : Les fonctions affines

I- Étude de fonctions affines

Définition : Une fonction affine est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = mx + p$.
m s'appelle le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Propriété (admise) : La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

* Ensemble de définitions :

Une fonction affine est une fonction polynome du 1er degrés, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$.

* Variations :

. si $m > 0$ f est croissante sur $\mathbb{R}$
. si $m < 0$ f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Demostrations :

* $m > 0$.

Soit a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Comparons $f(a)$ et $f(b)$

$a < b$
$ma < mb$ car $m > 0$
$ma + p < mb + p$
$f(a) < f(b)$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

* $f(x) = mx + p \qquad m < 0$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ comparants $f(a)$ et $f(b)$

$$a < b$$
$$ma > mb$$
$$ma + p > mb + p$$
$$f(a) > f(b)$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

* Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f $m>0$		$\nearrow$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f $m<0$		$\searrow$

* $(E) : f(x) = 0$

$(E) : mx + p = 0$

$(E) \Leftrightarrow mx = -p$

$(E) \Leftrightarrow x = \frac{-p}{m} \quad (m \neq 0)$

$S(E) = \left\{\frac{-p}{m}\right\}$

Traduction graphique de l'Équation

La courbe representant la fonction f coupe l'axe des abscises en un point qui a pour coordonnée : $\left(\frac{-p}{m} ; 0\right)$

* $(I) = f(x) > 0$

Résolution algébrique

$(I) : mx + p > 0$

$(I) \Leftrightarrow mx > -p$

Si $m > 0$	Si $m < 0$
$(I) \Leftrightarrow x > \frac{-p}{m}$	$(I) \Leftrightarrow x < \frac{-p}{m}$
$S(I) = \left]\frac{-p}{m} ; +\infty\right[$	$S(I) = \left]-\infty ; \frac{-p}{m}\right[$

Resolution graphique

Si $m > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{-p}{m} ; 0\right)$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses sur $\left]\frac{-p}{m} ; +\infty\right[$

Si $m < 0$ f est decroissante sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{-p}{m} ; 0\right)$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses sur $\left]-\infty ; \frac{-p}{m}\right[$

II - Exemples

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 6$ et $g(x) = x + 2$.

1°) Etudier les variations de f et de g. En déduire le tableau de variations.

2°) Etablir le Tableau de signes

3°) Representer $\mathcal{C}f$ et $\mathcal{C}g$.

4°) Résoudre (I) : $f(x) > g(x)$

a. graphiquement

b. par le calcul

* Tableau de signes

x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
Signes de $f(x)$ $m>0$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
Signes de $f(x)$ $m<0$	$+$	0	$-$

1°) Soit $a, b \in \mathbb{R} \,/\, a < b$ $\quad f(x) = -2x + 6$

$a < b$

$-2a > -2b$

$-2a + 6 > -2b + 6$

$f(a) > f(b)$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	↘	

On pose $(E) : f(x) = 0$

$S(E) = \{3\}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signes de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Soit $a, b \in \mathbb{R} \,/\, a < b$ $\quad g(x) = x + 2$

$a < b$

$a + 2 < b + 2$

$g(a) < g(b)$

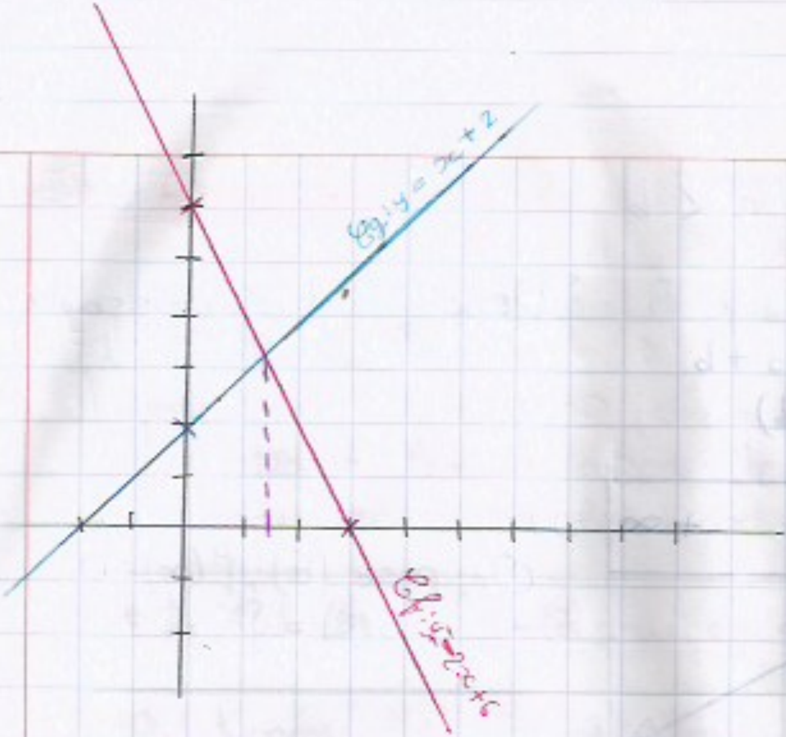
Donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de g	↗	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de g		$-$	0	$+$	

On pose (E) : $g(x) = 0$

$S(E) = \{-2\}$



f et g sont des fonctions affines donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont des droites

a) graphiquement $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty ; =1,5[$

b) $f(x) > g(x)$

$-2x + 6 > x + 2$

$-3x > -4$

$x < \frac{4}{3}$

$S(I) =]-\infty ; \frac{4}{3}[$

III - Application à l'étude des signes de fonctions plus compliqués

*Exemples : Étude du signe de la fonction g définie par $g(x) = (2x+1)(-x+3)$

On pose $(E) : (2x+1)(-x+3) = 0$

$S(E) = \left\{-\frac{1}{2} ; 3\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
signes de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signes de $-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
Signes de $(2x+1)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Soit $(I) : (2x+1)(-x+3) < 0$

$S(I) = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]3 ; +\infty\right[$

Exemple n°2 :

Etude du signe de $f \,/\, f(x) = \dfrac{x+2}{3x-6}$

On pose $(E_1) : x + 2 = 0 \quad S(E_1) = \{-2\}$

$(E_2) : 3x - 6 = 0 \quad S(E_2) = \{2\}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signes de $x + 2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Signes de $3x + 6$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Signes de $\dfrac{x+2}{3x-6}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	