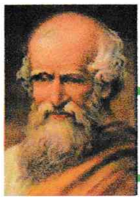


Fonctions polynômes du second degré.

***Archimède de Syracuse** physicien, mathématicien et ingénieur au III° siècle avant J-C. Il démontre de nombreuses propriétés sur les paraboles dans « la quadrature de la parabole ».*

I. Définition.

Définition : On appelle <u>fonction polynôme de degré 2</u> ou <u>trinôme du second degré</u>, toute fonction f définie sur *IR* par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$. où les coefficients a, b et c sont des réels donnés et $a \neq 0$.

☑ *Savoir-faire : Savoir reconnaitre les coefficients d'un trinôme du second degré :*
Identifie les coefficients des trinômes suivants :

- $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$: $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$
- $g(x) = x^2 - x$: $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$
- $h(x) = -x^2 + 3$: $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$
- $i(x) = (2x + 5)(-x + 4)$: $a = -2$, $b = 3$, $c = 20$

II. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.

Exemple : Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.
On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique : $f(x) = 2(x - \alpha)^2 + \beta$.

$2x^2 - 20x + 10 = 2(x^2 - 10x) + 10$

$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 \Rightarrow x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$

$2[(x-5)^2 - 25] + 10 = 2(x-5)^2 - 50 + 10 = 2(x-5)^2 - 40$

Forme genérale:

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \qquad x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$

Définition : Toute fonction polynôme f du deuxième degré peut s'écrire sous la forme : ....
où α et β sont deux nombres réels. Cette écriture s'appelle la <u>forme canonique</u> de f.

Remarque : Si $f(x) = ax^2 + bx + c$. on a alors $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

☑ *Savoir-faire : Savoir trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré :*
Détermine la forme canonique de la fonction f ayant pour expression $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

$-x^2 + 4x - 1 = -(x^2 - 4x) - 1$

$x^2 - 2x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$

$= -[(x-2)^2 - 4] - 1$ On developpe par $= -(x-2)^2 + 4 - 1$

$= -(x-2)^2 + 3$

III. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.

Propriété : Soit f définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$. La courbe représentative de f est une parabole............
Son sommet a pour abscisse $x_s = \frac{-b}{2a}$..... La droite qui a pour équation $x = \frac{-b}{2a}$...est l'axe de symétrie de la courbe.

- Si $a < 0$ alors la parabole a les branches tournées vers le ...bas............
- Si $a > 0$ alors la parabole a les branches tournées vers le ...haut..........

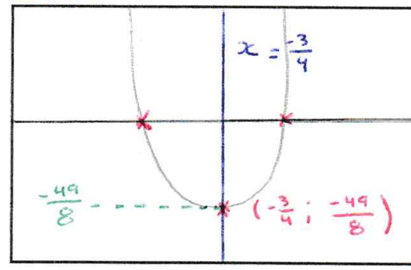
Remarque : En utilisant la forme canonique, on obtient directement les coordonnées du sommet de la parabole.

☑ ***Savoir-faire : Savoir dresser le tableau de variations d'une fonction trinôme du second degré :***

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 2x^2 + 3x - 5$:

f_1 est un trinome du second degré sa courbe est une parabole tournée vers le haut ($a = 2 > 0$) et l'abscisse de son sommet $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{4}$

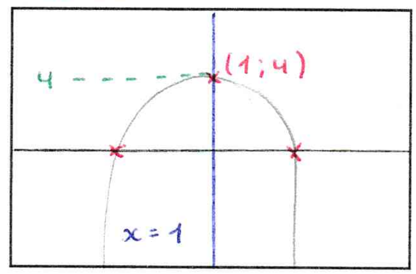
x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
Variations de f_1		↘	$\frac{-49}{8}$	↗	



2) Dresser le tableau de variations de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = -x^2 + 2x + 3$:

$a = -1 < 0$ C_{f_2} est un parabole tournée vers le bas $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ f_2 est croissante sur $]-\infty ; 1[$ et décroissante sur $]1 ; +\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f_2		↗	4	↘	



IV. Résolution d'une équation du second degré.

☑ ***Savoir-faire : Savoir résoudre une équation produit nul du second degré :***

Résoudre l'équation (E_1) : $(-2x + 3)(3x + 5) = 0$.

phrase magique : un produit est nul si est seulement si un aux moins des facteurs est nul.

$-2x + 3 = 0$; $x = \frac{3}{2}$ $\quad$ $3x + 5 = 0$; $x = \frac{-5}{3}$ $\quad$ $S(E_1) = \{\frac{-5}{3} ; \frac{3}{2}\}$

Remarque : $(-2x + 3)(3x + 5) = -2(x - \frac{3}{2}) \times 3(x + \frac{5}{3}) = -6(x - \frac{3}{2})(x + \frac{5}{3})$

☑ ***Savoir-faire : Savoir résoudre une équation du type (E) : $x^2 = a$:***

Résoudre les équations suivantes :

- (E_1) : $x^2 = 16$ $\quad$ $S(E_1) = \{-4 ; 4\}$
- (E_2) : $x^2 = 13$ $\quad$ $S(E_2) = \{-\sqrt{13} ; \sqrt{13}\}$
- (E_3) : $x^2 = 0$ $\quad$ $S(E_3) = \{0\}$
- (E_4) : $x^2 = -4$ $\quad$ pas de solution. $S(E_4) = \emptyset$

☑ Savoir-faire : Savoir factoriser une expression avec un facteur commun ou avec une identité remarquable:

- $f(x) = 2(x+1)(x-3) - 3(x+1)^2$

  $f(x) = (x+1)[2(x-3) - 3(x+1)]$

  $f(x) = (x+1)(-x-9)$

- $g(x) = x^2 - 25$

  $g(x) = x^2 - 5^2$

  $g(x) = (x-5)(x+5)$

- $h(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^2$

  $h(x) = [(x+1) - (2x+3)][(x+1) + (2x+3)]$

  $h(x) = (-x-2)(3x+4$

Propriété : Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation (E) : $x^2 - sx + p = 0$, alors $x_1 + x_2 = s$ et $x_1x_2 = p$.

$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ (E) : $x^2 - 5 + 6 = 0$ $x_1 + x_2 = 5$ $x_1 x_2 = 6$ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$

Définition : On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

☑ Savoir-faire : Savoir calculer le discriminant d'un trinôme :

Dans chaque cas ci-dessous calcule le discriminant :

- $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

  $a = 2$ $b = 3$ $c = -5$

  $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5)$

  $\Delta = 49$

- $g(x) = x^2 - x$

  $a = 1$ $b = -1$ $c = 0$

  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 0$

  $\Delta = 1$

- $h(x) = -x^2 + 3$

  $a = -1$ $b = 0$ $c = 3$

  $\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 3$

  $\Delta = 12$

- $i(x) = (2x+5)(-x+4)$

  $a = -2$ $b = 3$ $c = 20$

  $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 20$

  $\Delta = 169$

Propriété : Soit f une fonction polynôme du deuxième degré définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors

- Si $\Delta = 0$: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$: $a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Démonstration exigible :

En reprenant la forme canonique : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

si $\Delta > 0 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right] = a\left(x - \frac{b\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

si $\Delta > 0$

$x^2 - \Delta = (x - \sqrt{\Delta})(x + \sqrt{\Delta})$

☑ Savoir-faire : Savoir factoriser une expression du second degré :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 + x - 6$.

$a = 1$; $b = 1$; $c = -6$ $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$

$f(x) = 1 \times \left(x - \frac{-1-\sqrt{25}}{2 \times 1}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 1}\right)$

$f(x) = (x+3)(x-2)$

Propriété : Soit f une fonction polynôme du deuxième degré définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors

- Si $\Delta < 0$: l'équation (E) : $f(x) = 0$ n'a pas de solution
- Si $\Delta = 0$: l'équation (E) : $f(x) = 0$ a une solution $x_1 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$: l'équation (E) : $f(x) = 0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

☑ Savoir-faire : Savoir résoudre toutes les équations du second degré :

- (E_1) : $x^2 + x - 6 = 0$

  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$

  $\Delta > 0$ Donc (E_1) a 2 solutions

  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  $x_1 = -3$ $x_2 = 2$

- (E_2) : $-2x^2 - 4x + 30 = 0$

  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 30 = 256$

  $\Delta > 0$ Donc (E_2) a 2 solutions

  $x_1 = \frac{4 - \sqrt{256}}{2 \times (-2)}$ $x_2 = \frac{4 + \sqrt{256}}{2 \times (-2)}$

  $x_1 = 3$ $x_2 = -5$

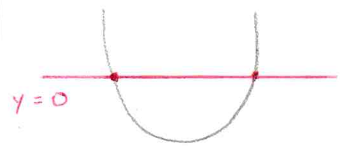
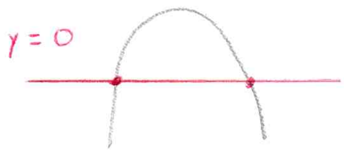
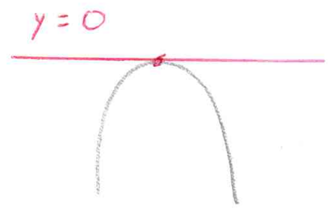
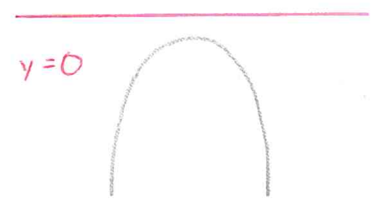
- (E_3) : $-x^2 + 3x - 5 = 0$

  $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = -11$

  $\Delta < 0$ Donc l'équation (E_3) n'a pas de solution

Rq = $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ Rq = $-2x^2 - 4x + 30 = -2(x-3)(x+5)$

V. Signes d'une fonction polynôme du second degré.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
a > 0			
	l'équation $f(x)=0$ a 2 solutions, on peut factoriser f $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	$f(x)=0$ a 1 solution $f(x)=a(x-x_1)^2$	$f(x)=0$ n'a pas de solution, on ne peut pas factoriser $f(x)$
a < 0			

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre les inéquations du second degré.*

1) Résoudre les inéquations suivantes :

◆ (I_1) : $x^2 + x - 6 > 0$

On pose (E_1) : $x^2 + x - 6 = 0$ $\Delta = 25$

$\Delta > 0$ (E_1) a 2 solution $x_1 = -3$ $x_2 = 2$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de x^2+x-6		+	0	−	0	+	

$S(I_1) =]-\infty ; -3 [\cup] 2 ; +\infty [$

◆ (I_2) : $-2x^2 - 4x + 30 \leq 0$

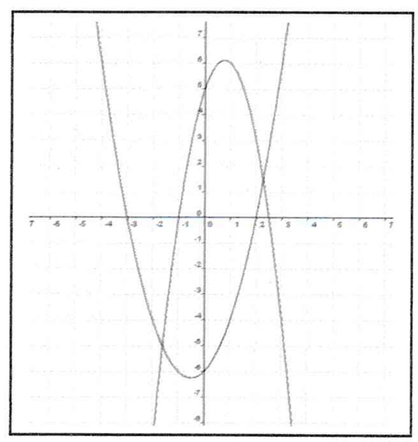
On pose (E_2) : $-2x^2 - 4x + 30 = 0$

$\Delta = 256$ (E_2) a 2 solution $x_1 = -5$ $x_2 = 3$

x	$-\infty$						$+\infty$
Signe de $-2x^2-4x+30$		−	0	+	0	−	

$S(I_2) =]-\infty ; -5] \cup [3 ; +\infty [$

2) Soit f et g les fonctions définie sur IR par $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ et $g(x) = x^2 + x - 6$.
Résoudre (I_1) : $-2x^2 + 3x + 5 \leq x^2 + x - 6$. Interpréter le résultat.



(I_1) : $f(x) \leq g(x)$

$(I_1) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0$

$(I_1) \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 11 \leq 0$

On pose (E) : $-3x^2 + 2x + 11 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) \times 11 = 136$ $\Delta > 0$

Donc (E) a 2 solutions : $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{136}}{-6}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
signes de $f(x)-g(x)$		−	0	+	0	−	

$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{136}}{-6}$