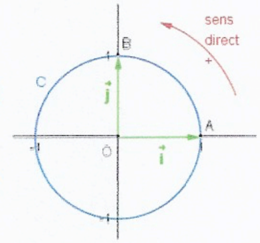
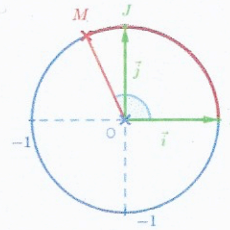
Fonctions trigonométriques.

Johannes Müller von Königsberg dit ***Régiomontanus (1436 ; 1476)*** *mathématicien allemand, ses traités sont à l'origine de la renaissance de la trigonométrie en Europe.*

I. Définition du radian.



Définition : Sur un cercle, on appelle sens direct, ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.



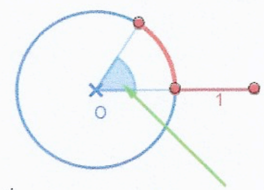
Propriété : Sur un cercle trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ (exprimée en unité de longueur du repère) est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimée en degré.

....

....

....

Définition : On appelle radian, noté rad, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



180 degré correspond à π radians(demi périmètre du cercle de rayon 1)

Dans les mesures en radians et en degré sont proportionnelles

Cet angle mesure 1 radian.

☑*Savoir-faire : Savoir convertir des mesures d'angles :*

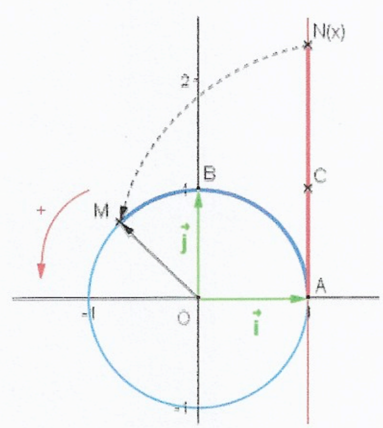
1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 45°.

$\alpha = \frac{\pi \times 45}{180} = \frac{\pi}{4}$

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{\pi}{6}$ rad.

$30° \left(\frac{180}{6}\right)$

II. Enroulement de la droite des réels.

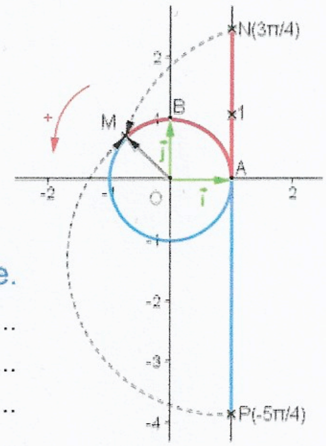


Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A;\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite.
Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc AM est ainsi égale à la longueur NM
La mesure de l'angle $\widehat{AOM}$ en radian est égale à la longueur AN

Exemples : Le point A a pour abscisse $\frac{3\pi}{4}$, après enroulement autour du cercle, il se retrouve en M. Le point P a pour abscisse $-\frac{3\pi}{3}$ après enroulement autour du cercle, il se retrouve en M.

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.



Propriété :

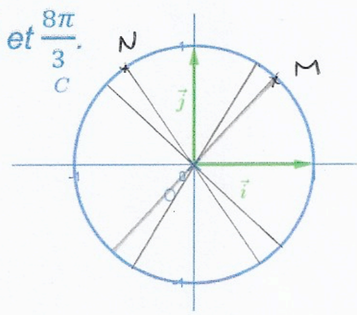
- Pour tout nombre réel α, le point d'abscisse α sur la droite coïncide avec un unique point M du cercle.
- A tout point M du cercle correspondent une infinité de valeurs qui peuvent être considérée comme des abscisses des points de la droite. Si α est une de ces valeurs, les autres peuvent s'écrire sous la forme $\alpha + k \times 2\pi$ k doit être un nombre entier relatif

☑*Savoir-faire : Savoir placer un point sur le cercle trigonométrique :*

Placer sur le cercle trigonométrique, les points M et N qui correspondent à $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{8\pi}{3}$.

• $\frac{9\pi}{4}$ On partage l'angle plat en 4 $\left(\frac{\pi}{4}\right)$. On compte $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

• $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$



Définition : La mesure principale d'un angle orienté est **la mesure**, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer la mesure principale d'un angle :*

Donne la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

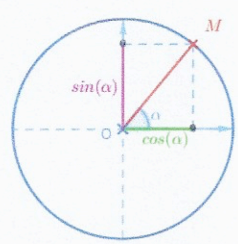
Un tour complet mesure $2\pi = \frac{8\pi}{4}$, faisons apparaitre les tours complets $\frac{27\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{19\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} + \frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 3 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$.

Donc la mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$ c'est $\frac{3\pi}{4}$

III. Cosinus et sinus d'un nombre réel.

Définition : Soit α un nombre réel, et M le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

- Le cosinus du nombre réel α est l'abscisse de M et on note $\cos(\alpha)$.
- Le sinus du nombre réel α est l'ordonnée de M et on note $sin(\alpha)$.



Propriété : Pour tout nombre réel α, on a :

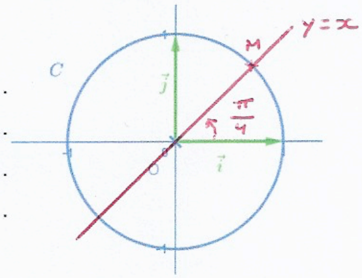
- $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$
- $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1^2 = 1$
- $cos(\alpha + 2k\pi) = cos(\alpha)$, avec $k \in Z$.
- $sin(\alpha + 2k\pi) = sin(\alpha)$, avec $k \in Z$.

☺ Valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

Propriété : $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Démonstration exigible :

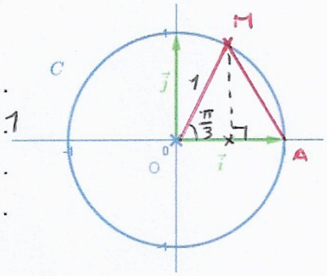
$\forall \alpha$, $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$ et $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car $M \in (d) : y = x$. Donc $cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$,
$2cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$
mais $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$. Donc $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



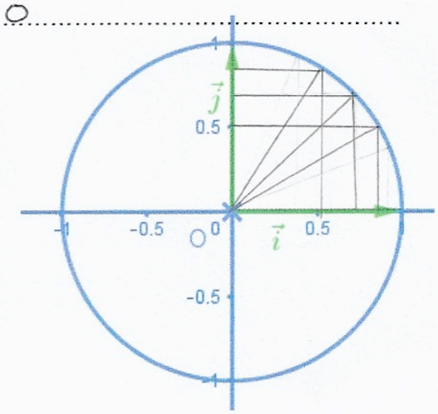
Propriété : $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Démonstration exigible :

Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ alors OMA est un triangle équilatéral,
donc $OM = \frac{1}{2}$ donc $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. $cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$
Donc $\frac{1}{4} + sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$, $sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$, donc
$sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$



Valeurs remarquables						
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos (x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin (x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



☺ Mesures d'angles associés.

Pour tout nombre réel x, on a :

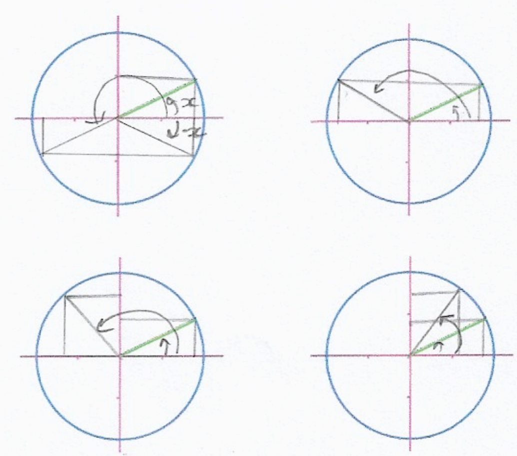
☺ $\cos(-x) = cos(x)$ ☺ $\sin(-x) = -sin(x)$

☺ $\cos(\pi + x) = -cos(x)$ ☺ $\sin(\pi + x) = -sin(x)$

☺ $\cos(\pi - x) = -cos(x)$ ☺ $\sin(\pi - x) = sin(x)$

☺ $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x)$ ☺ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x)$

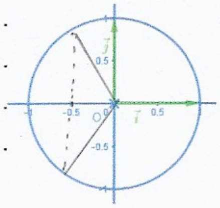
☺ $cos(\frac{\pi}{2} + x) = sin(x)$ ☺ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x)$



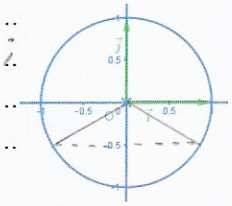
☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation trigonométrique :*

Résoudre dans ℝ les équations suivantes : ☺ $\cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ☺- $\sin(x) = -0{,}5$.

$S(E_1) = \{ \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$



$S(E_2) = \{ \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$



IV. Fonctions trigonométriques.

Définition :

- On appelle fonction cosinus, la fonction définie sur R par $cos : x \to cos(x)$.
- On appelle fonction sinus, la fonction définie sur R par $sin : x \to sin(x)$.

Propriété : Périodicité.

Pour tout x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $sin(x + 2\pi) = sin(x)$.

Les fonctions cos et sin sont des fonctions périodiques de période 2π.

Leur courbe représentative se répète sur tout intervalle de longueur 2π

Propriété : Parité.

Pour tout x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $sin(-x) = sin(x)$.

- La fonction cos est paire sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- La fonction sin est impaire sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère

x	0	π
Variations de cos	1 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de sin	0 ↗	1 ↘	0