Généralités sur les suites.

***Leonardo Pisano** dit **Fibonacci (1175-1250)** mathématicien italien. Dans son ouvrage « **Liber Abaci** » il développe la première approche de la notion de suites numériques.*

I. Définition.

*Voici un problème posé en 1202 par **Leonardo Pisano** dit **Fibonacci**.*
Un fermier achète un couple de bébés lapins. Après 2 mois, ce couple commence à se reproduire et donne naissance à un nouveau couple de lapins qui au bout de 2 mois, se reproduira à son tour. Chaque couple donnant naissance à un nouveau couple tous les mois, lesquels commencent à se reproduire au bout de 2 mois.

Nombre de mois	Bébés	ados	adultes	total
0	1	0	0	1

On crée ainsi une suite de nombres :
{……,……,……,……,……,……,……,……,………..……… On indexe chacun des nombres de la liste. On Note u_0 le nombre de lapins le premier mois, u_1 celui le deuxième mois, etc… On a donc :

…………………………………………………..………………...
…………………………………………………..………………...

On note (u_n) l'ensemble des nombres de cette suite de nombres. On dit que u_5 est le ……………………..………
……………….……………… Attention : u_1 n'est pas ……………………………..………………………………………..……..
*On a ainsi défini une **suite numérique**.*
*On peut lui associer une **fonction** définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par : $u : n \rightarrow u(n) = u_n$*

Définition : Une <u>suite numérique</u> (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n. Le nombre u_n est appelé le <u>terme de rang n</u> de cette suite (ou d'indice n).

Attention, ne pas confondre (u_n) qui est………………………………………………………………………………………
et u_n qui est………………………………………………………………………………………

II. Deux différents modes de création d'une suite :

☺ Suites définies par une formule explicite : $u_n = f(n)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer un terme d'une suite définie en fonction de n :*

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de N, $u_n = 2n^2 + 3$.
Calcule u_0 , u_1 , u_2 , u_5 , u_{100}

………
………
………

☑ *Savoir-faire : Savoir jouer avec les indices :*

Exprime en fonction de n : u_{n+1} , u_{2n} , u_{2n-1} , 2 u_n +1, - u_{n+1} + 3 .

………
………
………

☺ Suites définies par récurrence: $u_{n+1} = f(u_n)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer un terme d'une suite définie par récurrence :*

On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 3$ *et pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$.

Calcule u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_{100}

……

……

……

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, on ne peut pas connaitre u_{100} *sans connaître ………*
Cependant il est possible d'écrire un algorithme.

☑ *Savoir-faire : Savoir écrire un algorithme pour calculer un terme d'une suite définie par récurrence :*

On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 3$ *et pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$. *Calcule* u_{100}

En langage naturel

```
Initialisation
 ………… → u
Traitement
     Pour i allant de 1 à ………, faire
          ………… → u
     Fin du pour
Sortie
     Afficher u.
```

En Python

```python
def suite(n):
    u=3
    for i in range (1,n+1):
        u=2*u+5
    return(u)
```

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Remarque : On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ *et pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Calcule les cinq premiers termes de cette suite.

……

……

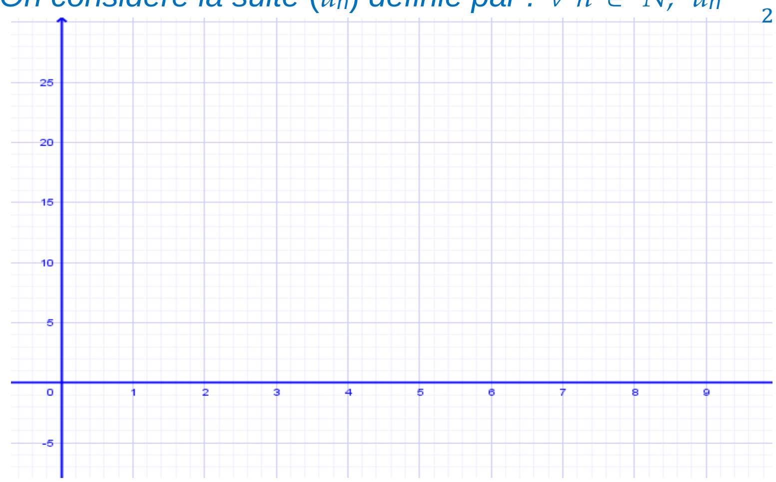
Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents.

III. Représentation graphique d'une suite :

Définition : Dans un repère du plan, on représente une suite (u_n) par le nuage de points de coordonnées (n ; u_n).

☑ *Savoir-faire : Savoir représenter graphiquement une suite numérique :*

On considère la suite (u_n) *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$. *Représenter la suite* (u_n).



	A	B
1	n	
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13		

IV. Sens de variation d'une suite numérique.

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$. En observant sa représentation graphique, on remarque que $u_0 \ldots u_1$; $u_1 \ldots u_2$; $u_2 \ldots u_3$; $u_3 \ldots u_4$. On a l'impression que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ldots\ldots u_n$.
Peut-on le prouver ?

………

………

………

Définition : On dit qu'une suite (u_n) définie sur N est :

- croissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \ldots\ldots u_n$.
- décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \ldots\ldots u_n$.
- constante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \ldots\ldots u_n$.

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier les variations d'une suite :*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$. Étudie les variations de (u_n).
Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Conjecture sur les premiers termes : ……………………………………………………………………………………

Démonstration : ………………………………………………………………………………………………………

………

………

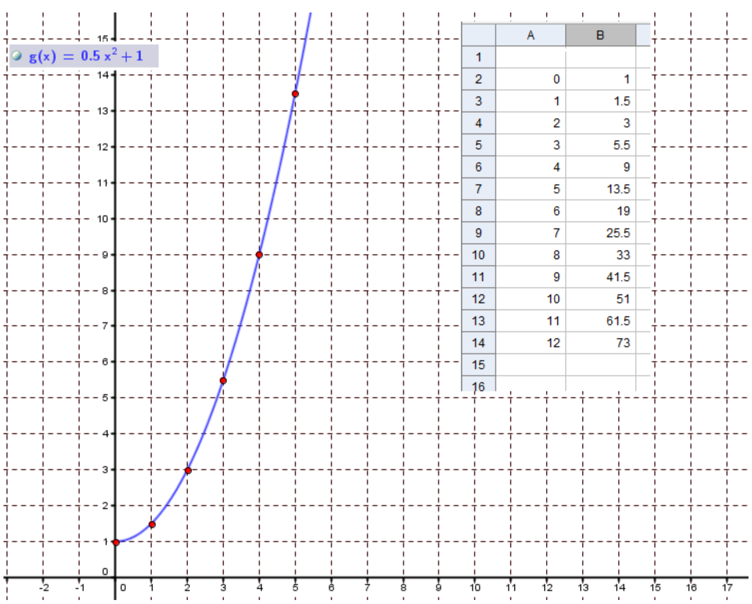
Remarque : Pour certaine suites l'inégalité $u_{n+1} > u_n$, n'est vraie que pour n≥p, on dit que ……………………………

………

☺ Suites et fonctions : $u_n = f(n)$.

Définition : Soit une fonction f définie sur [0 ; +∞ [et une suite numérique (u_n) définie sur N par $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est croissante sur [0 ; +∞ [alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur [0 ; +∞ [alors la suite (u_n) est décroissante.



	A	B
1		
2	0	1
3	1	1.5
4	2	3
5	3	5.5
6	4	9
7	5	13.5
8	6	19
9	7	25.5
10	8	33
11	9	41.5
12	10	51
13	11	61.5
14	12	73
15		
16		

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

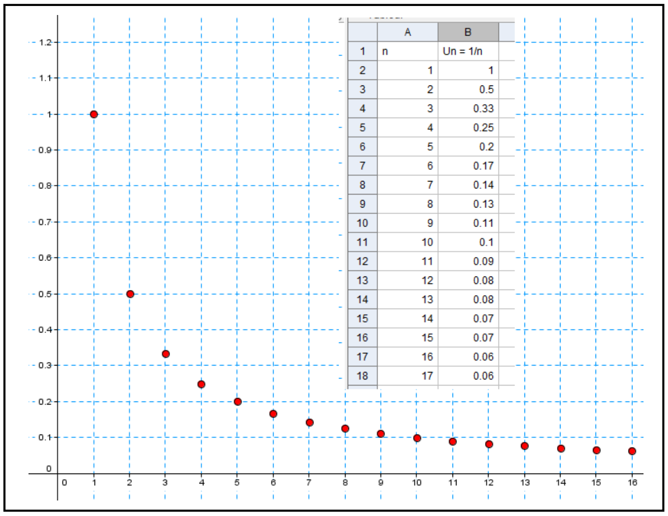
………………………………………………………………

IV. Notion de limite d’une suite.

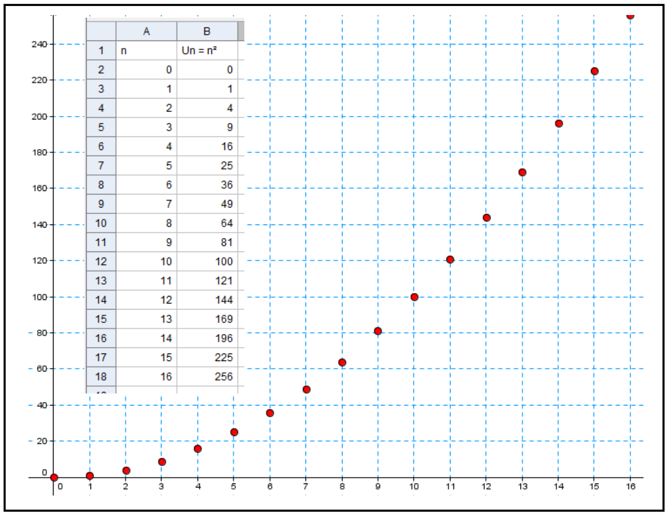
Etudier la limite d’une suite (u_n), c’est se demander ce que deviennent les nombres u_n lorsque n devient de plus en plus grand.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$. $\forall n \in N^*$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.



	A	B
1	n	Un = 1/n
2	1	1
3	2	0.5
4	3	0.33
5	4	0.25
6	5	0.2
7	6	0.17
8	7	0.14
9	8	0.13
10	9	0.11
11	10	0.1
12	11	0.09
13	12	0.08
14	13	0.08
15	14	0.07
16	15	0.07
17	16	0.06
18	17	0.06



	A	B
1	n	Un = n²
2	0	0
3	1	1
4	2	4
5	3	9
6	4	16
7	5	25
8	6	36
9	7	49
10	8	64
11	9	81
12	10	100
13	11	121
14	12	144
15	13	169
16	14	196
17	15	225
18	16	256

………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………

Définition : On dit qu’une suite (u_n) converge vers un nombre L si, à partir d’un certain rang, les termes sont aussi proches qu’on le souhaite du nombre L. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Définition : On dit qu’une suite (u_n) à pour limite $+\infty$, si, à partir d’un certain rang, les termes sont plus grands que n’importe quel nombre qu’on a choisi. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : Certaines suites n’ont pas de limites : ………………………………………………………………………………

……

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser un algorithme Seuil :*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in N$, $u_{n+1} = 4\, u_n$ .Cette suite est croissante et admet pour limite.........Ecrire un algorithme permettant de préciser le rang á partir duquel u_n est supérieure à S.

Initialisation
S ←.............
N ←.............
U ←.............
Traitement
Tant que U ....S
N ←.............
U ←.............
Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.

```
def seuil(s):
    n=0
    u=2
    while u<s:
        n=n+1
        u=4*n
    return(n)
```