Chap 3 : Generalités sur les fonctions

I - Definition ét vocabulaire

<u>Définition</u> : Soit D un intervale ou une reunion d'intervale. On dit que f est une fonction definit sur D si a tout nombre $x \in D$, f associe un unique nombre.

On dit D est l'ensemble de définition de f est on le note Df. On dit que y est l'image de x et on le note $y = f(x)$

<u>Ex</u> : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1$. $f(5) = 26$.

- l'image de 5 par la fonction f est 26.
- <u>Un des</u> antecendants de 26 par la fonction f est 5.

On ecrit aussi Df R

$$f : x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

<u>Convention</u> : Par convention, si l'ensemble de définitions d'une fonction n'est pas donné, on convient que c'est le plus grand ensemble de nombre dont on peut calculer l'image.

* Recherche d'ensembles des définitions...

• f_1 / $f_1(x) = 2x + 1$.

f_1 est une fonction affine (fonction polynôme) on peut calculer l'image de tout les nombres.
Donc $D_f = \mathbb{R}$.

• $f_2(x) = \frac{x-3}{x-2}$

f est une fonction rationelle donc elle est definie par tous les nombres qui n'annulent pas son dénominateur.

$(E) : x - 2 = 0$
$(E) \Leftrightarrow x = 2$

Donc $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

• $f_3(x) = x^2 + 2x - 5$

f_3 est une fonction polynome du 2nd degrés. Elle est definie pour tout nombre.

$D_{f_3} = \mathbb{R}$

• $f_4(x) = \sqrt{2x+4}$

f_4 est une fonction "radicale", elle est definie pour tout nombre tel que

$2x + 4 \geq 0$.
$2x \geq -4$
$x \geq -2$

$x \in [-2 ; +\infty[$

Donc $D_{f_4} = [-2 ; +\infty[$

Remarques : Une fonction est en general nommé par une lettre minuscule : f, g, h, f1, f2...

Ne pas confondre f qui est le nom de la fonction (le nom de la machine) et f(x) qui est un nombre (l'image du nombre x par la fonction f)

Par definition, un nombre a une unique image par une fonction. Cependant un nombre peut avoir ~~aucun~~ un ou plusieurs antecedents.

On peut définir une fonction par une expression, un tableau, un programme, une courbe

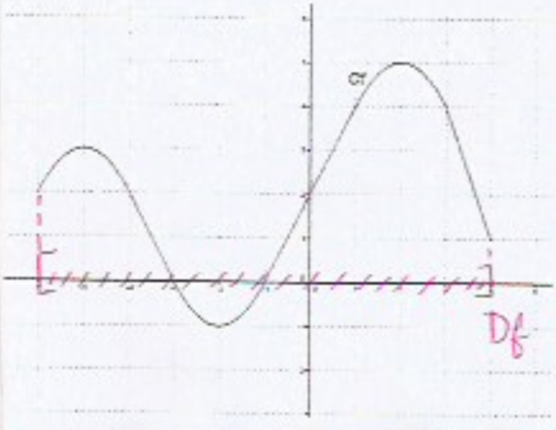
II - Courbe representative d'une fonction

définition : Soit f une fonction Df sur l'ensemble de définition. On appelle courbe representative de la fonction f, noté Cf, l'ensemble des points M (x ; y) tels que : $x \in Df$ et $y = f(x)$.

Tant que nous n'avons pas vu les variations d'une fonction, nous ne pouvons pas construire la representation graphique d'une fonction (sauf fonction affine grâce à la propriété) pour l'instant on vous demandera donc seulement d'utiliser une courbe pour lire graphiquement.

On peut utiliser la courbe representative d'une fonction pour :

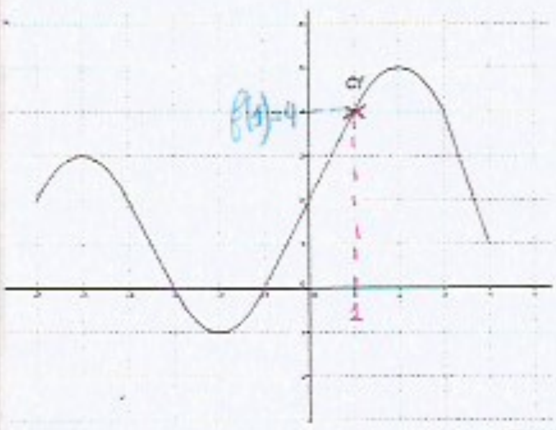
* Lire l'ensemble de définition de la fonction.



L'ensemble de définition de la fonction est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.

$D_f = [-6 ; 4]$

* lire l'image d'un nombre.



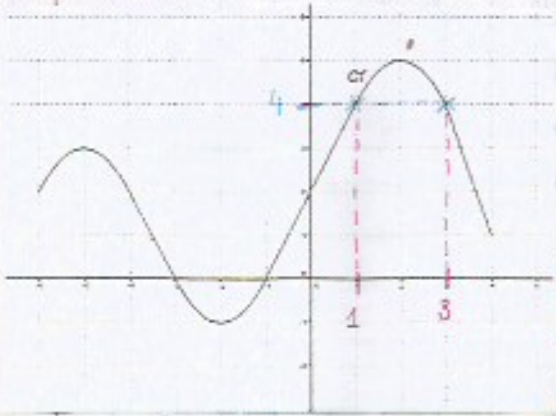
l'image d'un nombre α est l'ordonnée du point de la courbe qui a pour abscisse α.

l'image de 1 est $f(1) = 4$.

$f(-4) = 2$ $f(-2) = -1$

$f(-1) = 0$ $f(0) = 2$

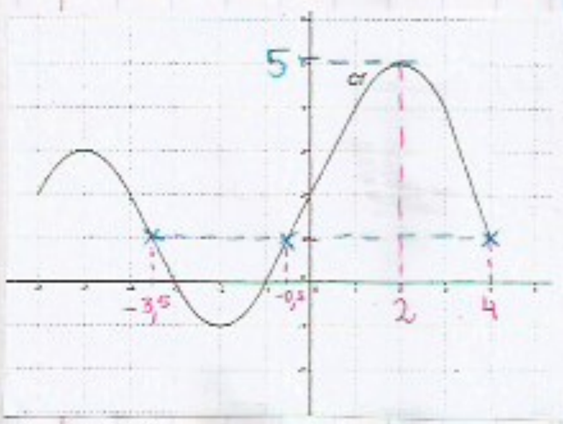
* lire les antécédents d'un nombre.



Les antécédents d'un nombre β sont les abscises des points de la courbe qui ont pour ordonée β

- 4 a 2 antécédents qui sont 1 et 3
- -1 a 1 antécédents qui est -2
- 0 a 2 antécedents qui sont -3 et -1
- 2 a 4 antécedents qui sont -6 ; -4 ; 0 et ≈ 3,6.

* lire les solutions d'une équation de la forme (E) = f(x) = k.



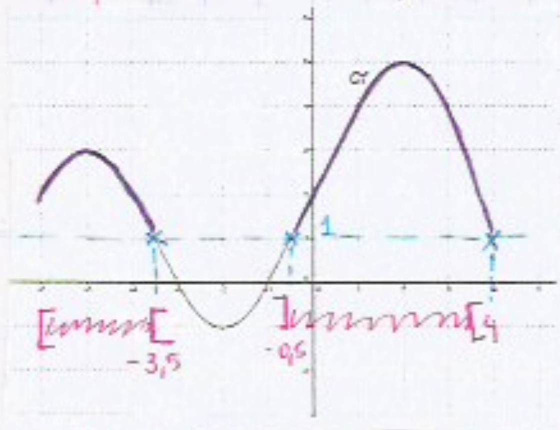
Les solutions de l'équation (E) = f(x) = k sont les abscisses des points de la courbe qui ont pour ordonnée k.

- l'équation $(E_1) : f(x) = 5$ a 1 solution qui est 2.

$S(E_1) = \{2\}$

- $(E_2) : f(x) = 1$ $S(E_2) = \{-3,5 ; -0,5$

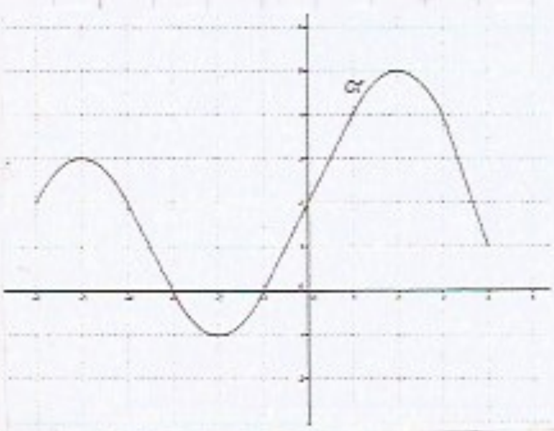
* lire les solutions d'une inéquation de la forme (I) : $f(x) < k$.



Les solutions de l'inéquation (I) : $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée inferieur à k.

- l'inéquation (I_1) : $f(x) > 1$ a pour solution $S(I_1) = [-6 ; -3,5[\cup]-0,5 ; 4[$
- (I_2) : $f(x) \leq 2$
- $S(I_2) = [-4 ; 0] \cup [3,6 ; 4]$

* Établir le tableau de signes de la fonction

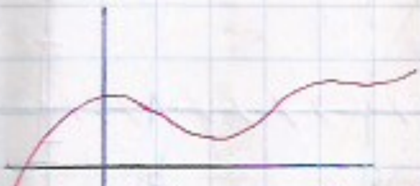


Un tableau de signes d'une fonction est un tableau dans lequel on peut lire les solutions de (E) : $f(x) = 0$; (I_1) : $f(x$
(I_2) : $f(x) < 0$

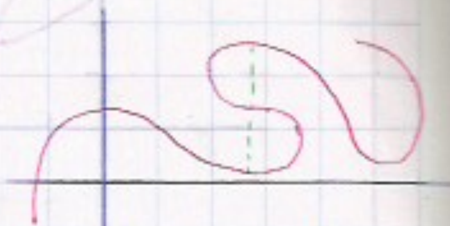
x	-6		-3		-1		4
signes de $f(x)$		+	0	−	0	+	

Remarque : Par une fonction, un nombre ne peut avoir qu'une image. Donc une courbe représentative d'une fonction ne peut pas avoir plusieurs points d'intersection avec une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple :



Celle-ci, elle est une courbe representative d'une fonction.



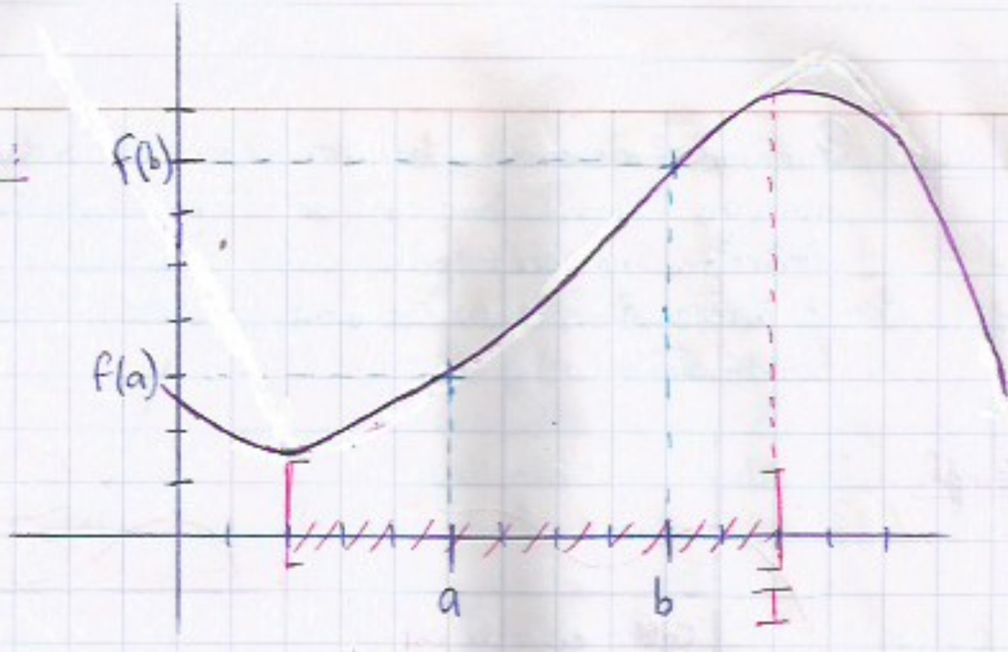
Pas bonne !
Elle a trois image, donc elle n'est pas une courbe representative.

III - Sense de variation d'une fonction

Definition : Soit f une fonction, Df sont ensemble de definition et I un intervale inclue dans Df. On dit que f est croissante sur I si $\forall a, b \in I$ tel que $a < b$ alors $f(a) < f(b)$

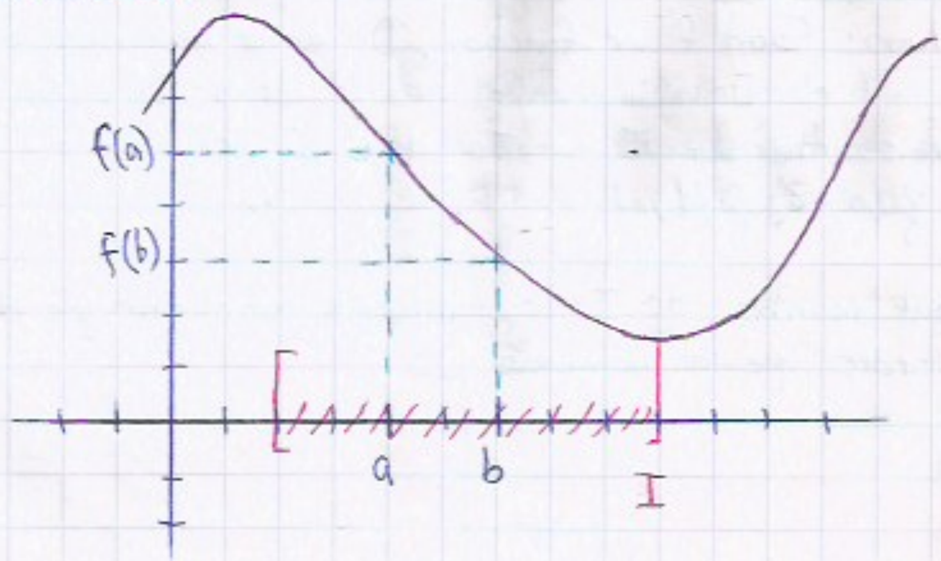
Pour tout nombre de I, les images sont rangés dans le même ordre que les nombres

Ex:

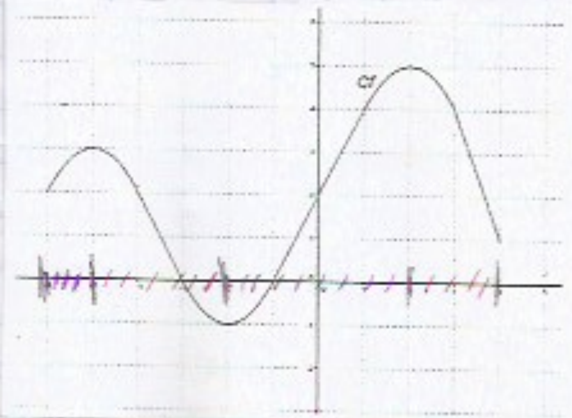


Définition: Soit f une fonction, Df son ensemble de définition et I un intervale, inclue dans Df. On dit que f est décroissante sur I si $\forall a, b \in I$ tel que $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

Les images sont rangés dans l'ordre contraire des antécedents.



Décrire les variations d'une fonction f signifie préciser les intervalles sur lequels f est croissante et ceux sur lequels f est décroissante.



f est croissante sur $[-6\,;-5] \cup [-2\,;2]$

f est décroissante sur $[-5\,;-2] \cup [2\,;4]$

(On peut établir le Tableau de variations de la fonction.

x	-6	-5	-2	2	4
variations de f $f(x)$	2	3	-1	5	1

Application à la logique : V ou F.

- $f(-4) > f(-3)$ — **VRAI**
  f est décroissante sur $[-5;-2]$
  -4 et $-3 \in [-5;-2]$ et $-4 < -3$
  Donc $f(-4) > f(-3)$

- $f(0) < f(1)$ — **FAUX**
  f est croissante sur $[-2;2]$ 0 et $1 \in [-2;2]$ et $0 < 1$ Donc $f(0) < f(1)$.

- $f(-3) > f(-1)$ On ne peut pas savoir

- $\forall x \in [-6;-3]$ $f(x) \leq 3$ — **VRAI**
  - Si $x \in [-6;-5]$ $f(x) \leq f(-5)$ car f est croissante sur $[-6;-5]$ donc $f(x) \leq$
  - Si $x \in [-5;-3]$ $f(x) \leq f(-5)$ car f est décroissante sur $[-5;-2]$ donc $f(x) \leq 3$

- $-1 \leq f(0) \leq 5$ — **VRAI**
  $-2 \leq 0 \leq 2$ et f est croissante sur $[-2;2]$ Donc $f(-2) \leq f(0) \leq f(2$
  Soit $-1 \leq f(0) \leq 5$

IV- Extremums Locaux

Définition : On dit que f admet un maximum sur I si $\forall x \in I$ $f(x) \leq M$, et $\exists x_0 \in I /$ $f(x_0) = M$.

Exemples :
- Sur $[-6;4]$ f admet 5 pour maximum atteint pour $x = 2$.
- Sur $[-6;-2]$ f admet 3 pour minimum atteint pour $x = -5$.

Définition : On dit que f admet un minimum sur I si $\forall x \in I$ $f(x) \geq m$ et $\exists\, x_0 \in I / f(x_0) = m$

exemples :
- Sur $[-6;4]$ f admet -1 comme minimum atteint pour $x = -2$.

Définition : On dit que f admet un extremum si f admet un maximum ou un minimum.