GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

DEFINITION

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles. On dit qu'une fonction est définie sur D si a tout nombre x de D elle associe un unique nombre y.

→ y s'appelle l'image de x par la fonction f et se note $f(x)$. x s'appelle un antécedant de y.

D s'appelle l'ensemble de définitions et se note Df.

FONCTION DEFINIE PAR UNE EXPRESSION

* SAVOIR CALCULER UNE IMAGE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$. Determine l'image de -2.

$$f(-2) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

L'image de -2 par f est 1.

* DETERMINER DES ANTECEDANTS

Tous les antécedants de 5 par f. Les antécedants de 5 par f sont solutions de l'équation $(E) : f(x) = 5$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 - 3 &= 5 \\ x^2 &= 8 \\ x &= \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8} \\ x &= 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

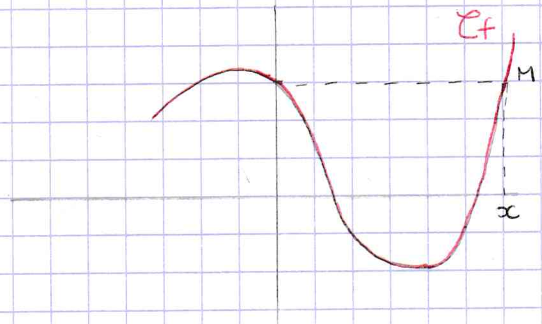
$$S(E) = \{-2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}\}$$

Donc 5 a 2 antécedants par f qui sont $-2\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$.

COURBE RÉPRESENTATIVE DE FONCTION

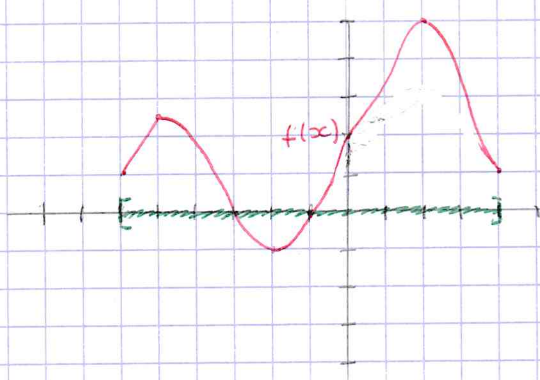
DEFINITION

Soit f une fonction définie sur Df. On appelle courbe représentative de la fonction f, l'ensemble des points du plan, dans les coordonnées sont de forme $(x ; f(x))$ avec $x \in Df$.



On note la courbe de f, Cf, et on dit qu'elle a comme équation $y = f(x)$.

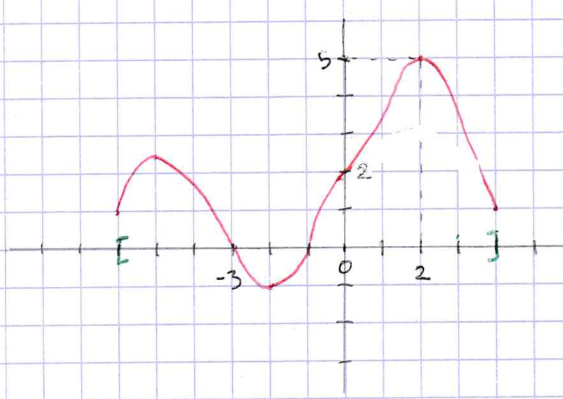
* SAVOIR DETERMINER GRAPHIQUEMENT UN ENSEMBLE DE DEFINITIONS



L'ensemble de définitions est l'ensemble des abscisses des points de Cf.

- $Df = [-6 ; 4]$

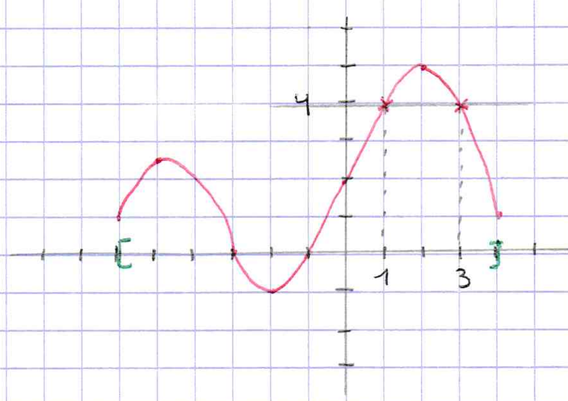
• SAVOIR DETERMINER GRAPHIQUEMENT UNE IMAGE



L'image d'un nombre a, $(x \in Df)$ est l'ordonnée du points de Cf qui a pour abscisse x.

$f(2) = 5$
$f(-3) = 0$
$f(0) = 2$

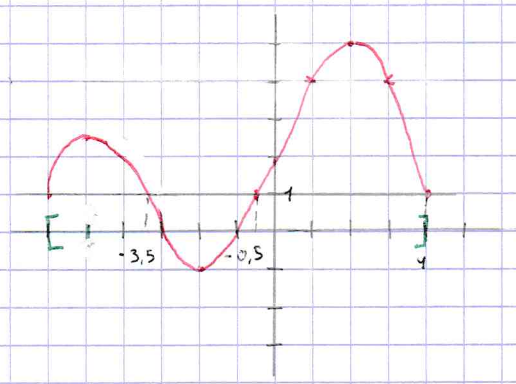
* DETERMINER GRAPHIQUEMENT DES ANTÈCEDENTS



Les antécedants d'un nombre k, sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée = k.

ex. 4 a deux antécedants, 1 et 3.

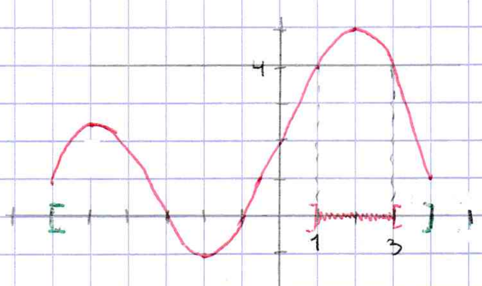
* SAVOIR RÉSOUDRE GRAPHIQUEMENT UNE ÉQUATION



Les solutions de l'equation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée = k.

ex. Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont $-3,5$, $-0,5$ et 4.

* SAVOIR RÉSOUDRE GRAPHIQUEMENT UNE INÉQUATION

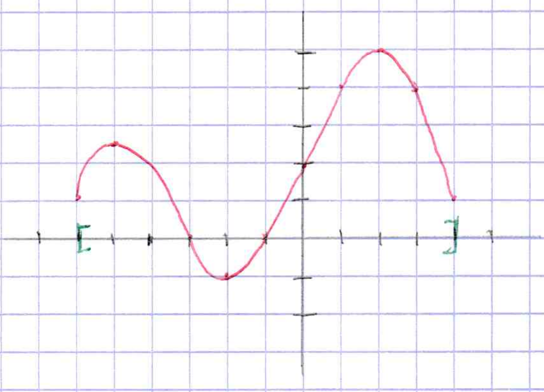


Les solutions de l'inéquation $f(x)$ strictement $> k$ sont les abscisses des points de C_f dans l'ordonnés $> k$.

ex. $(I_1) : f(x) > 4$

$S(I_1) =]1 ; 3[$

* SAVOIR ETABLIR UN TABLEAU DE SIGNES



Dans un tableau de signes on doit lire les solutions de :

$(E) : f(x) = 0$

$(I_1) : f(x) > 0$

$(I_2) : f(x) < 0$

x	-6		-3		-1		4
signes de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

VARIATION D'UNE FONCTION

DÉFINITION

Soit f une fonction, soit I un intervalle inclus dans Df.

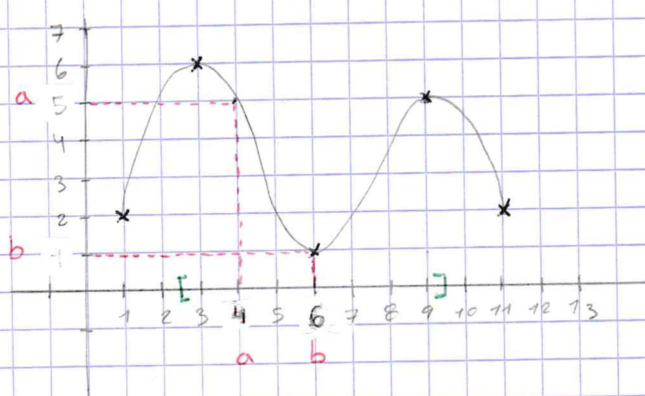
→ On dit que f est croissante sur I si les images de deux nombres $\in I$ sont rangés dans le même ordre, quelque soit ce nombre.

f est croissante sur I si $\forall$ a, b $\in I / a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

On dit que f est decroissante sur I si les images de deux nombres $\in I$ sont rangés dans l'ordre contraire, quelque soit le nombre.

f est decroissante sur I si $\forall$ a,b $\in I / a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

EXEMPLE



La fonction est croissante sur $[1, 3] \cup [6, 9$

La fonction est decroissante sur $[3;6] \cup [9;11]$

On peut consigner ces résultats dans un tableau de variation.

x	1		3		6		9		11
variations de f	3	↗	6	↘	1	↗	5	↘	2

EXTREMUMS D'UNE FONCTION

DEFINITION

Soit I un intervalle inclus dans D_f.

On dit que

- M est un maximum de f sur I si $\forall x \in I$. *
- m est un minimum de f sur I si $\forall x \in I$.
  $f(x) \geq m$ et $\exists\, x_0 \in I \,/\, f(x_0) = m$

* $f(x) \geq M$ et $\exists\, x_0 \in I \,/\, f(x_0) = M$

EXEMPLE

Sur la courbe si-dessus :

- sur $[-6;4]$, f admet pour maximum 5, atteint pour $x_0 = 2$ et admet pour minimum -1 atteint pour $x_0 = -2$.

Sur $[-6;0]$, f admet pour maximum 3 atteint pour $x_0 = -5$ et admet pour minimum -1 atteint $x_0 = -2$.

APPLICATION À LA LOGIQUE

x	-2		0		3		4
variations de h	-1	↗	$\frac{5}{2}$	↘	-1	↗	6

VRAI OU FAUX

- $h(-2) > h(-1)$? FAUX

h est croissante sur $[-2 ; 0]$, -2 et $-1 \in [-2 ; 0]$ et $-2 < -1$

Donc $h(-2) < h(-1)$

- $h\left(\frac{1}{3}\right) \leq h\left(\frac{3}{2}\right)$? FAUX

h est décroissante sur $[0 ; 3]$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{2} \in [0, 3]$ et $\frac{1}{3} < \frac{3}{2}$.

Donc $h\left(\frac{1}{3}\right) > h\left(\frac{3}{2}\right)$

- $h(3,6) \leq h(3,7)$? VRAI

h est croissante sur $[3 ; 4]$, $3,6$ et $3,7 \in [3 ; 4]$ et $3,6 < 3,7$.

Donc $h(3,6) < h(3,7)$

- $h(1) > h(3,5)$? FAUX

La fonction h n'est pas monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle contenant 1 et 3,5. On ne peut pas les comparer.

Faux, parce qu'on peut pas savoir.

- $h(2) > 1$? VRAI

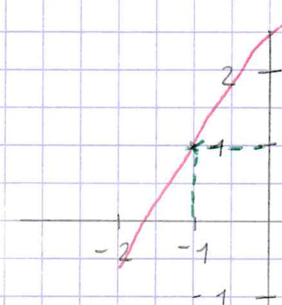
h est décroissante sur $[0 ; 3]$, 2 et 3 $\in [0 ; 3]$ et $2 < 3$

Donc $h(2) > h(3)$. Donc $h(2) > 1$

- $-1 \leq h(-1) \leq 2,5$

h est croissante sur $[-2 ; 0]$

-2 ; -1 et $0 \in [-2 ; 0$
et $-2 < -1 < 0$



Donc $h(-2) < h(-1) < h(0)$

$-1 < h(-1) < \frac{5}{2}$