Chap 6 : Geometrie analytique

I - Notion de repère du plan

Un repère du plan est donné par deux droites sécantes graduées

Un repère du plan peut être donnée par 3 points non alignés. On note un repère par le triplet origine $(O ; I ; J)$

Dans un repère, à tout point M correspond un unique couple appelés cordonées du point. x_M s'appelle abscisse du point M, y_M s'appelle ordonées du point M

On dit que le repère est ortogonale lorsque les axes sont perpendiculaires à la ligne. On dit que le repère est ortonormale lorsque les axes sont perpendiculaires et ont la même unité de longueur

II - Les coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : Soit deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors I milieu de [AB] a pour coordonées $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

* Application n°1

Soit $A(-1;2)$ et $B(3;5)$

Calcule les coordonnées de I milieu de $[AB]$

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Donc $I(1;3,5)$

* Application n°2 : Symetrie.

Soit $E(3;2)$ et $M(5;3)$ Determiner les coordonnées de D symétrique de E par rapport à M.

M est le milieu de $[ED]$ donc $x_M = \frac{x_E + x_D}{2}$

soit $5 = \frac{3 + x_D}{2}$ Donc $10 = 3 + x_D$

donc $x_D = 7$.

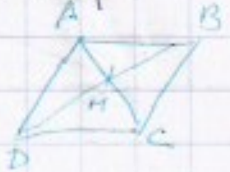
Et $y_M = \frac{y_E + y_D}{2}$ soit $3 = \frac{2 + y_D}{2}$

Donc $D(7;4)$

Application n°3 : 4ème sommet d'un parallèlogramme

$A(2;3)$ $B(5;2)$ $C(3;1)$.

Determiner les coordonnées de D tel que A, B, C soit un //logramme.



Determinons les coordonnées de M milieu de [AC].

$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Donc $M\left(\frac{5}{2};1\right)$.

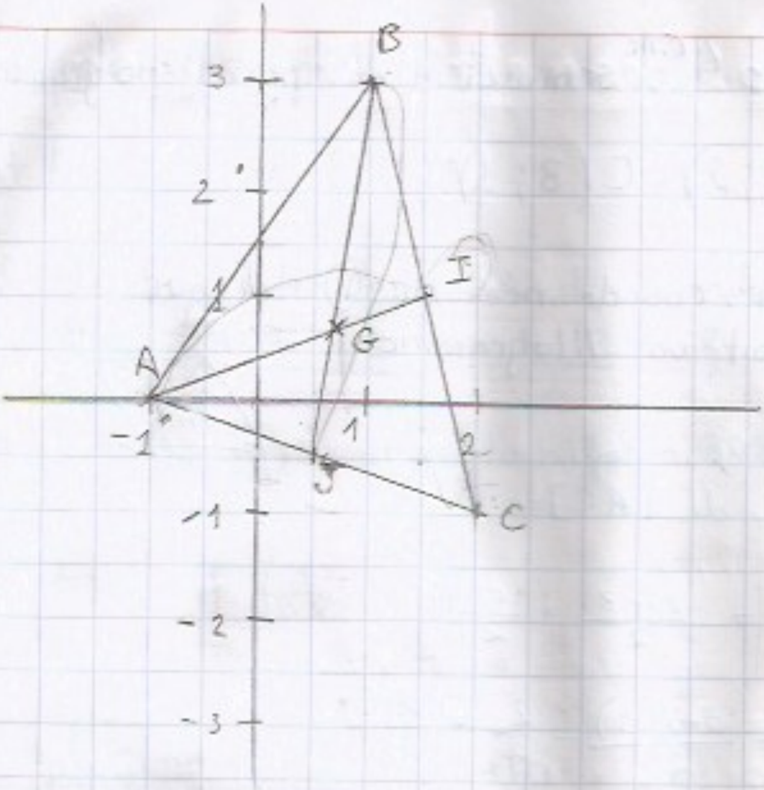
Determiner les coordonnées de D symetrique de B, par rapport à M.

$x_M = x_D + x_b$ donc $\frac{x_D + 5}{2}$ donc $5 = x_D + 5$

Donc $x_D = 0$.

$y_M = \frac{y_D + y_B}{2}$ donc $1 = \frac{y_B + 2}{2}$ donc $2\ y_B + 2$

Donc $y_D = 0$ Donc $D(0;0)$



$A(-1;0)$ $B(1;3)$ $C(2;-1)$

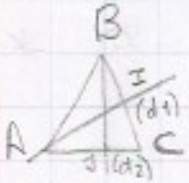
Determiner par le calcul les coordonnées de G centre de gravité du triangle ABC.

Plan d'attaque

* Determiner les coordonnées de I milieu de [BC]

* Determiner les équations réduites de (AI) et (BJ)

* Determiner le point d'intersection de (AI) et (BJ)



$A(-1;0)$ $B(1;3)$ $C(2;-1)$

Soit I le milieu de [BC]

$$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc $I\left(\frac{3}{2};1\right)$. Determinons l'équation de (d_1) de la mediane issue de A. Son équation est de la forme $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_A - y_I}{x_A - x_I} = \frac{0-1}{-1-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{\frac{-5}{2}} = \frac{2}{5}$$

Donc (d_1) a une équation de la forme $y = \frac{2}{5}x + p$.
$A \in (d_1)$ donc $y_A = \frac{2}{5}x_A + p$ soit $0 = -\frac{2}{5} + p$ donc $p = \frac{2}{5}$
Donc (d_1) a pour équation $y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$

Soit J milieu de [AC]

$x_J = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$

$y_J = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+(-1)}{2} = \frac{-1}{2}$

Donc $J\left(\frac{1}{2} ; \frac{-1}{2}\right)$

Determinons l'équation de (d_2) la mediane issue de B

Son équation est de la forme $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_B - y_J}{x_B - x_J} = \frac{3 - \left(\frac{-1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{1} = 7$$

Donc (d_2) a une équation de la forme $y = 7x + p$

$B \in (d_2)$ donc $y_B = 7x_B + p$ soit $3 = 7 \times 1 + p$

Donc $p = -4$.

Donc l'équation réduite de (d_2) est $y = 7x - 4$

G est le point d'intersection de (d_1) et (d_2) donc les coordonnées sont solutions de

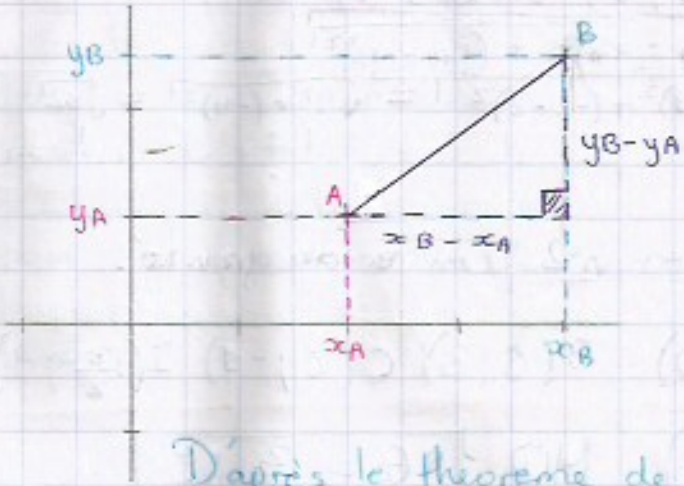
$(S) : \begin{cases} y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \\ y = 7x - 4 \end{cases}$ $\quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4 = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \\ y = 7x - 4 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{33}{5}x = \frac{22}{5} \\ y = 7x - 4 \end{cases}$ $\quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{5} \div \frac{33}{5} = \frac{22}{5} \times \frac{5}{33} = \frac{2}{3} \\ y = 7 \times \frac{2}{3} - 4 = \frac{2}{3}. \end{cases}$

Donc $G\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

III - Distance entre deux points

Attention ce qui va suivre ne peut se poser que dans un repère orthonormée (orthonormale)



D'après le théorème de pythagore de Monsieur Pythagore

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Remarque : Il faut que les axes soit orthogonaux pour que le triangle soit rectangle et qu'ils aient les mêmes unités pour pouvoir ajouter les longueurs.

Propriété : Soit $(O ; I ; J)$ un repère orthonormée (orthonormale) et soit deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$

Alors $[AB]$ est égal à $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

* **Application n°1** calcul d'une distance

Soit $A(-3;2)$ et $B(1;-2)$

Soit $A(-3;2)$ et $B(1;2)$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

$AB = 4\sqrt{2}$

* **Application n°2** centre de gravité :

$A(-1;0)$ $B(1;3)$ $C(2;-1)$ $I(\frac{3}{2};1)$

$G(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ MQ $\boxed{AG = \frac{2}{3} AI}$

$AG^2 = (x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2$

$AG^2 = (\frac{2}{3}+1) + (\frac{2}{3}-0)^2$

$AG^2 = (\frac{5}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2$

$AG^2 = \frac{25}{9} + \frac{4}{9} = \frac{29}{9}$

$AG = \sqrt{\frac{29}{9}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{9}}$

$AG = \frac{\sqrt{29}}{3}$

1

Rappelle de cette petite propriété de collège

Le centre de gravité est situé au $\frac{2}{3}$ de la médiane.

* Application : Équation de cercle.

On considère le cercle de centre A (2;3) et rayon 5.
soit $M(x;y) \in \mathcal{C}(A;5)$

$$\sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = 5$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$AM = 5$$