Chap 8 : Geometrie vectorienne

I- Notion du vecteur

a) Définition

Soit A et B deux points distincts, on appelle vecteur $\vec{AB}$ l'objet mathématiques définie par :

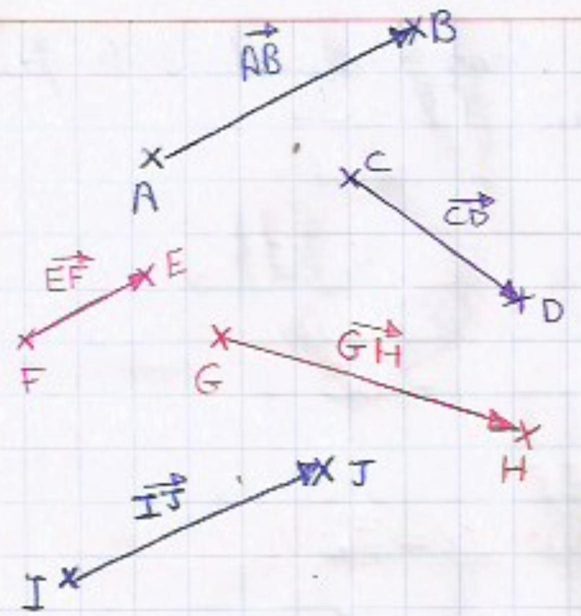
→ une direction (la direction de la droite (AB))
→ une longeur (la longeur AB)
→ un sens (le sens de A vers B)

le point A s'appelle l'origine $\vec{AB}$ et B son extremit

Le vecteur $\vec{AB}$ correspond à l'idée du déplacement de A vers B.

B) Vecteurs égaux

Définition : deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, la même longeur et le même sens



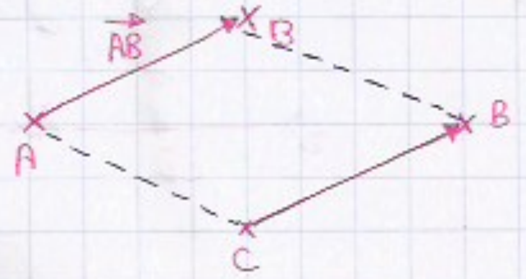
- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ n'ont pas la même direction, ni la même longeur.

- $\vec{AB}$ et $\vec{EF}$ ont la même direction, mais pas la même longueur ni le même sens.

- $\vec{AB}$ et $\vec{GH}$ ont la même longueur, mais pas la même direction.

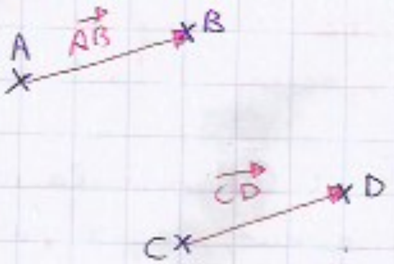
- $\vec{AB}$ et $\vec{IJ}$ ont la même direction, la même longueur et le même sens $\vec{AB} = \vec{IJ}$

Propriété : Soit A, B, C, D 4 points distincts alors $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow$ ABCD est un parralelogramme.

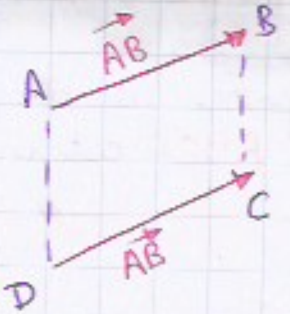


Application : Construire dans chaque cas le point D tel que $\vec{AB} = \vec{CD}$

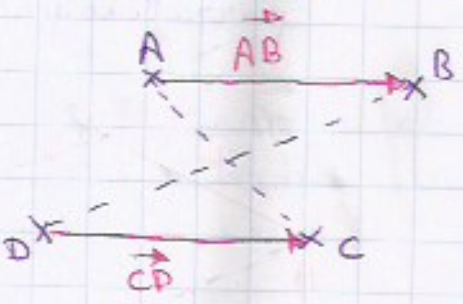
* avec les carreaux



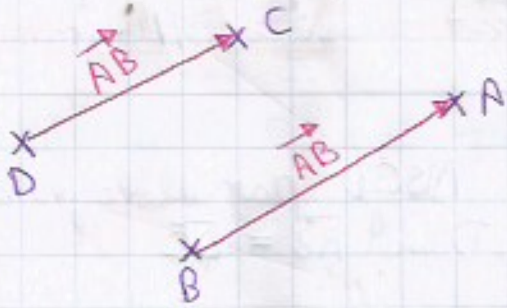
* avec les côtés //



* avec les milieux



* avec les longueurs

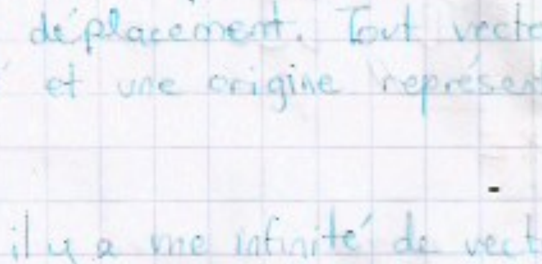


c) Représentant d'un vecteur

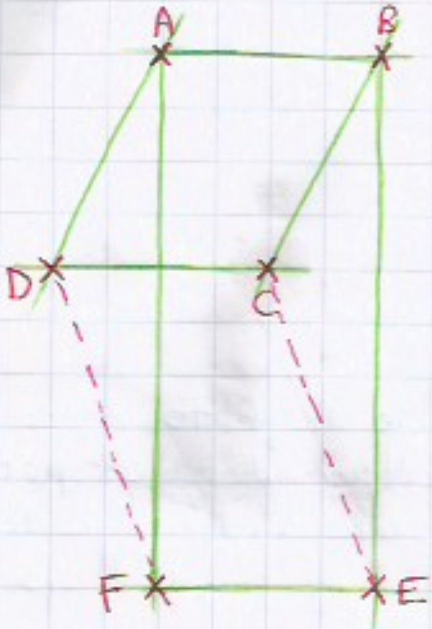
Un vecteur n'est pas un ensemble de points, c'est une idée de déplacement. Tout vecteur définie par une extremité et une origine représente l'idée du déplacement.

Comme il y a une infinité de vecteurs égaux, et qu'un vecteur ne depends pas d'un point précis, on peu utiliser une notation qui ne précise pas ni son origine ni son extrémité. $\vec{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$.

Construire D tel que $\vec{CD}$ soit un représentant de $\vec{u}$



Application: ABCD est un parralélogramme, ABEF aussi ~~prouve~~ prouve que
· DCEF est aussi un //logr名ame



ABCD parralelogramme
Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ABEF parralelogramme
Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$

Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$
Donc DCEF est un //logramme.

d) Vecteurs particuliers

* $\overrightarrow{BA}$ a la même direction et longueur mais le même sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

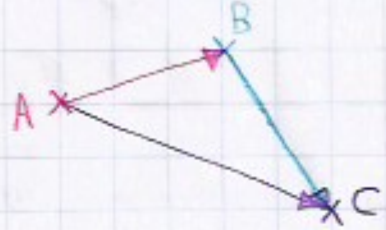
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

II- Addition de vecteurs

a) Relation de Mr. Chaseles

les points A, B, C trois points distincts.

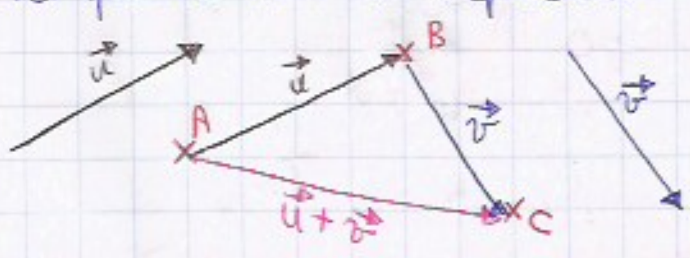
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



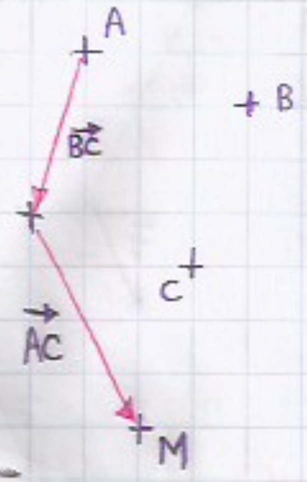
b) Addition de deux vecteurs

Attention, nous allons vivre un instant magnifique, la création d'une opération mathématique dans un monde virtuel...

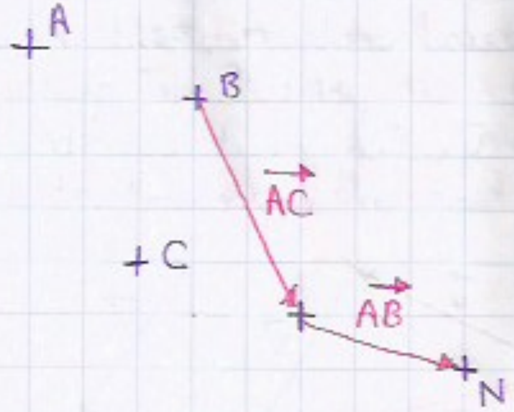
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, soit A un point, on peut construire le point B tel que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$. On peut construire le point C, tel que $\overrightarrow{BC}$ soit un représentant du $\vec{v}$.



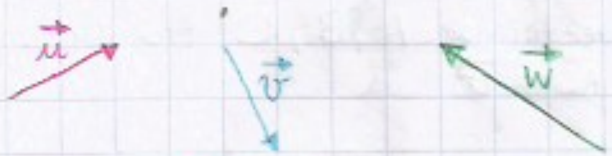
* Application : • Construire le point M tel que
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$

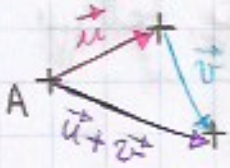


• Construire le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

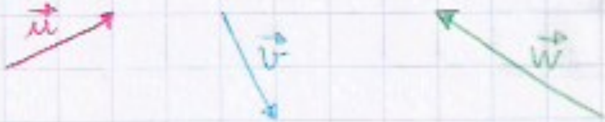


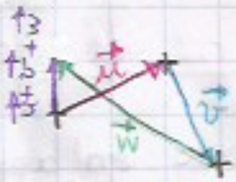
- Construire le représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine A.





- Construire le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v} + \vec{u}$ d'origine B. et construire un représentant de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$





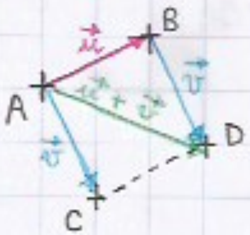
Propriété : L'addition de deux vecteurs est une opération commutative : $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.

Propriété admise : l'addition dans le monde des vecteurs est une opération associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Règle du //logramme :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A, B, C trois points tel que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$

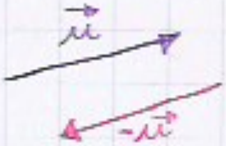
Un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ est $\vec{AD}$, tel que ABDC soit un //logramme.



III - Soustraction de vecteurs

a) vecteurs opposés

Soit $\vec{u}$ un vecteurs on appelle opposé de $\vec{u}$ que l'on note $-\vec{u}$, le vecteur ayant la même longueur, la même direction mais le sens contraire.



b) soustraction des vecteurs

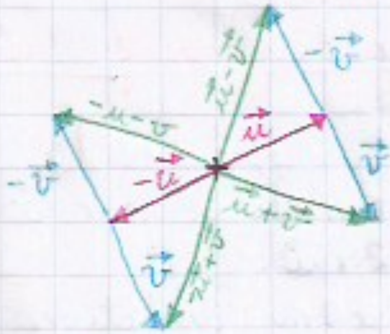
On peut définir la soustraction de deux vecteurs comme $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

* Application : Construire : $\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{u} - \vec{v}$

$-\vec{u} + \vec{v}$

$-\vec{u} + -\vec{v}$



Propriété : le vecteur opposé de $\vec{u} + \vec{v}$ est $-\vec{u} - \vec{v}$

On peut écrire $-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$.

c) le vecteur nul ou comment faire un coup de bluff

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$$

Vecteur $\vec{AA}$ a une longueur égal à 0, mais n'a pa
de direction ce n'est pas un vecteur.
Soit on créé une autre teórie, soit on fait un coup
de bluff, on fait comme si ~~s~~'était un vecteur
On l'appelle vecteur nul et on le note $\vec{0}$.

Propriété : pour tout vecteur $\vec{u}$

- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

IV - Multiplication de vecteurs par un nombre réel

INTRODUCTION :

On construit le vecteur $\vec{v}$ défi
par $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$.
Il a la même direction que
$\vec{u}$, le même sens, et une long
égale à deux fois celle de $\vec{u}$.

On dit que $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u}$

De même : $\vec{w} = -3 \cdot \vec{u}$

Definition : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. On definit le vecteur $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ comme : * ayant la même direction que $\vec{u}$.

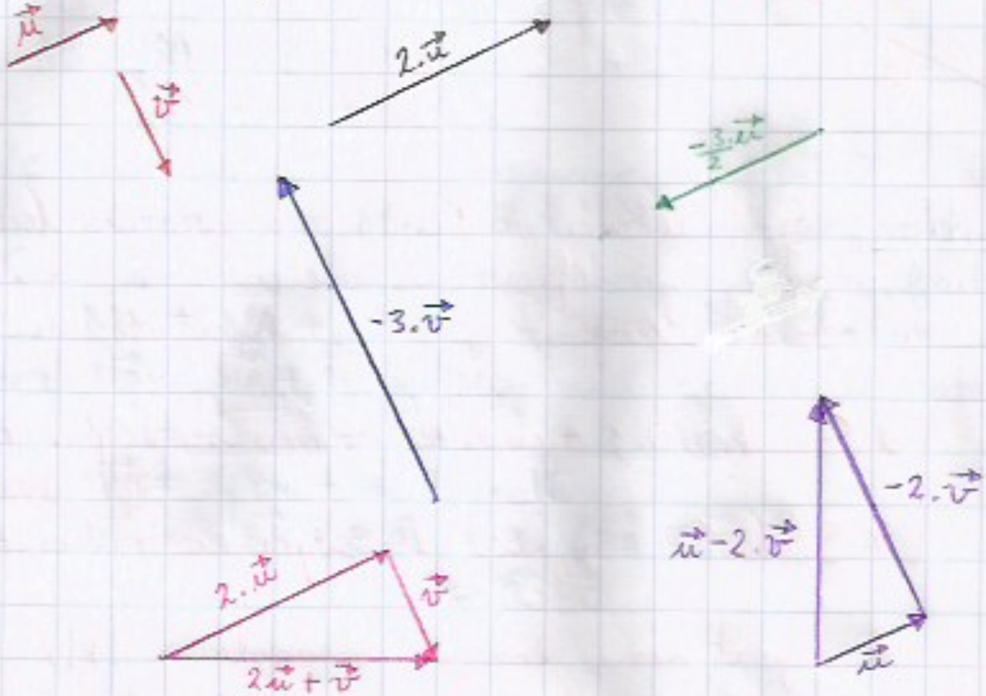
* Si $k > 0$; ayant le même sens que $\vec{u}$.
* Si $k < 0$; ayant le sens contraire de $\vec{u}$.

* ayant une longueur égale à $|k| \times$ celle de $\vec{u}$

$|k|$ qui se lit valeur absolue de k est definie par :

$|k| = k$ si $k > 0$
$|k| = -k$ si $k < 0$

Exemple : Construire un représentant de :
$2.\vec{u}$; $-3.\vec{v}$; $-\frac{3}{2}.\vec{u}$; $2.\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-2.\vec{v}$



Application n°2 : Soit [AB] un segment, construire M tel que : $\vec{MA}+3\vec{MB}=\vec{0}$

$$\vec{MA}+3.\vec{MB}=\vec{0}$$
$$\vec{MA}+3.(\vec{MA}+\vec{AB})=\vec{0}$$
$$\vec{MA}+3.\vec{MA}+3.\vec{AB}=\vec{0}$$
$$4.\vec{MA}+3.\vec{AB}=\vec{0}$$
$$4.\vec{MA}=-3.\vec{AB}$$
$$\vec{MA}=\frac{-3}{4}.\vec{AB}$$
$$\vec{AM}=\frac{3}{4}.\vec{AB}$$

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous k et λ.

$$* \; k.(\vec{u}+\vec{v}) = k.\vec{u} + k.\vec{v}$$

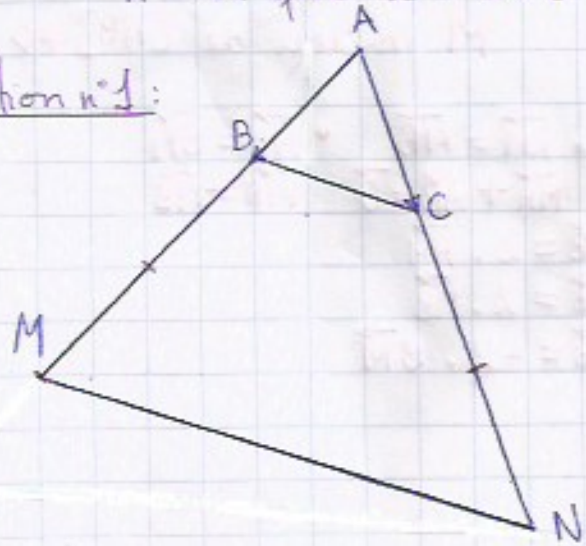
$$* \; k.(\lambda.\vec{u}) = (k.\lambda).\vec{u}$$

V - Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs sont dit colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un nombre K tel que $\vec{u} = k.\vec{v}$

Application n°1 :



ex 57, 58, 59, 63 p 209

ABC est un triangle ;

1°) Construire M et N tels que :

* $\overrightarrow{AM} = 3 . \overrightarrow{AB}$
* $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + 2 . \overrightarrow{AC}$.

2°) Prouve que (BC) // (MN)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ D'après Mr. Chasles

Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

Donc $\overrightarrow{MN} = -3 . \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2 . \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{MN} = 3 . \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 2 . \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{MN} = 3 . \overrightarrow{BA} + 3 . \overrightarrow{AC} = 3 . (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= 3 . \overrightarrow{BC}$

Application n°2 :

M milieu de [AB] ⟺

* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
* $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$
  $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AB} = 2 . \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AB} = 2 . \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AB} = -2 . \overrightarrow{BM}$