Graphes.

I. Vocabulaire.

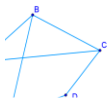
Exemple :

*Le schéma suivant s'appelle un **graphe**.*

*Il possède 5 **sommets :** .....,.....,.....,.....,....., ; on dit qu'il est d'**ordre** ......*

*Les sommets E et B sont **adjacents** car ils sont reliés par une arête.*

*Le sommet B est de **degré** 3 car 3 arêtes partent de B.*



Définition

- On appelle graphe non orienté un ensemble de points, appelés sommets, reliés par des lignes, appelées arêtes.
- L'ordre du graphe est le nombre de sommets.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
- Deux sommets reliés par une arête sont adjacents.
- Un graphe est dit complet si deux sommets quelconques sont adjacents.

....

....

Propriété

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

....

....

....

Définition

Soit un graphe G non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. La matrice d'adjacence associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Exemple :

Le graphe ci-dessus est d'ordre .... donc sa matrice associée est d'ordre ....Le coefficient a_{23} est égal à car il y a .... arête qui relie les sommets ... et ....

Remarque :...

....

II. Graphes connexes, chaîne eulérienne.

Définition

- Dans un graphe non orienté, une chaîne est une succession d'arêtes mises bout à bout.
- La longueur de la chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose.
- On dit qu'une chaîne est fermée si ses extrémités coïncident.
- Un cycle est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.
- Un graphe G est connexe si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Exemples :

....

....

....

....

Propriété

Soit une matrice d'adjacence A associée à un graphe G non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. Le nombre de chaîne de longueur k reliant le sommet i au sommet j est égal au terme a_{ij} de la matrice A^k.

Exemple :

....

....

....

....

....

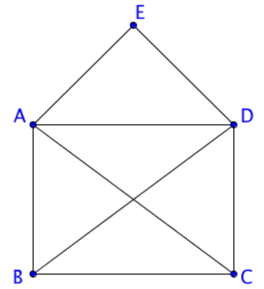
....

Définition

♦ Une chaîne eulérienne d'un graphe G est une chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe G.

♦ Un cycle eulérien est une chaine eulérienne fermée.

Exemple :



....

....

....

....

Théorème d'Euler

Soit G un graphe connexe.

♦ G admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous les sommets de G sont de degré pair.

♦ G admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, deux sommets de G exactement sont de degré impair. Dans ce cas, la chaîne est d'extrémité ces deux sommets.

☑ *BAC ES – Asie – Juin 2003.*

EXERCICE 2 *(Enseignement de Spécialité)* **5 points**

Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

	B	C	L	M	P
B		X		X	X
C	X		X	X	
L		X		X	
M	X	X	X		X
P	X			X	

a) Dessiner un graphe représentant cette situation.

b) Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier.

c) Proposer un tel trajet.

d) Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

....

....

....

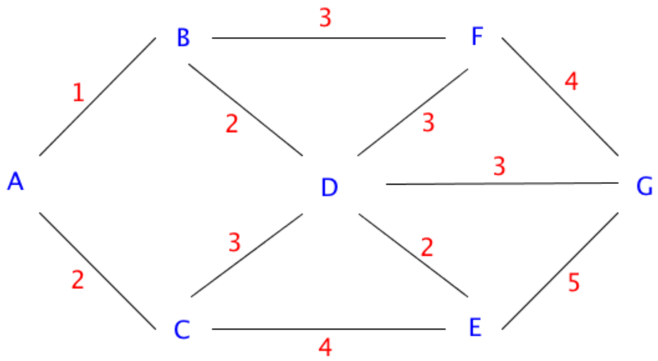
....

....

III. Chemin le plus court, Algorithme de DIJKSTRA.

Exemple :

Le graphe ci-contre représente un réseau routier entre 7 villages A, B, C, D, E, F et G. Les étiquettes correspondent aux distances en kilomètres séparant deux villages.
On veut déterminer le chemin le plus court entre les villages A et G.
Il s'agit donc de déterminer le chemin reliant A et G dont le poids est minimum.
On va utiliser l'algorithme de Dijkstra :



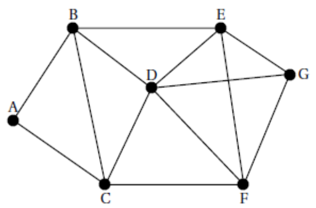
A	B	C	D	E	F	G	*Légende :*

☑ *BAC ES – Pondichéry –2013.*

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

On considère le graphe Γ ci-dessous :

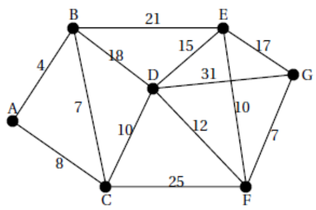


PARTIE A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F, G.

PARTIE B

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous. Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



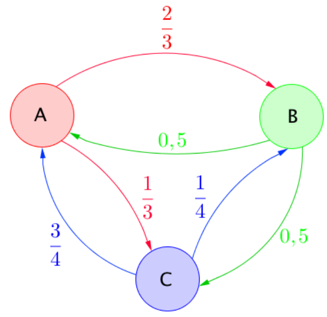
1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G. Justifier la réponse grâce à un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

IV. Graphes probabilistes.

a) Définition.

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A, B et C.
Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont A, B ou C (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).
Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à ....

Les poids des arcs sont alors des probabilités.
Un tel schéma est appelé un graphe probabiliste.



Définition

Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égal à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de A est égal à ....

b) Matrice de transition.

Définition

Soit G un graphe probabiliste d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La matrice de transition de G est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

Dans l'exemple, la matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & .... & ... \end{pmatrix}$

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant B alors qu'il se trouvait chez l'attaquant A.

Remarques :

- Le coefficient a_{11} de la matrice M est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients a_{22} et a_{33}.
- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

c) Etat probabiliste.

Définition

L'état probabiliste après *n* étapes est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après *n* étapes.

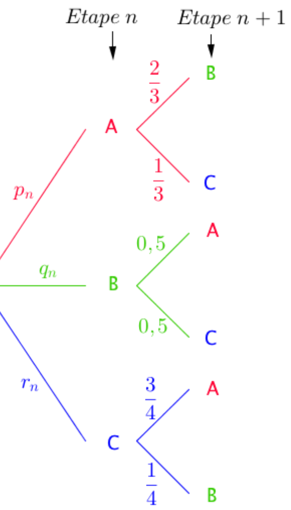
Dans l'exemple des passeurs au football, si à l'étape 0, c'est l'attaquant A qui a le ballon, alors l'état initial s'écrit P_0 (   ). L'état probabiliste après une étape est donc   .

....
....
....
....
....
....
....

On note $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste après n étapes. L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de l'étape n à l'étape n+1. A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

……

On vérifie alors que : $P_{n+1} = P_n \times M$.



Propriété

On considère un graphe probabiliste de matrice de transition M et dont l'état probabiliste après n étape est P_n. Pour tout entier naturel n, on a :

$P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_0 \times M^n$ où P_0 est l'état initial.

Dans l'exemple précédent, calcule $P_0 \times M^3$.

……

……

……

……

a) Etat stable.

Définition

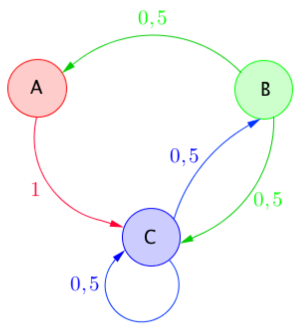
Un état probabiliste est dit stable lorsqu'il n'évolue pas lors de répétitions de l'expérience.

Propriété

Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0. L'état stable P vérifie alors l'égalité $P = P \times M$. Et si n tend vers l'infini, alors l'état probabiliste P_n tend vers l'état stable P.

Exemple :

On considère le graphe probabiliste ci-contre : Vérifions que l'état stable est la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.



……

……

……

……

……

☑ *BAC ES – Amérique du nord –2013.*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b. Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   c. Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n n = a_n - \frac{8}{9}$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. **a.** Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   b. Interpréter ce résultat.

……

……

……

……