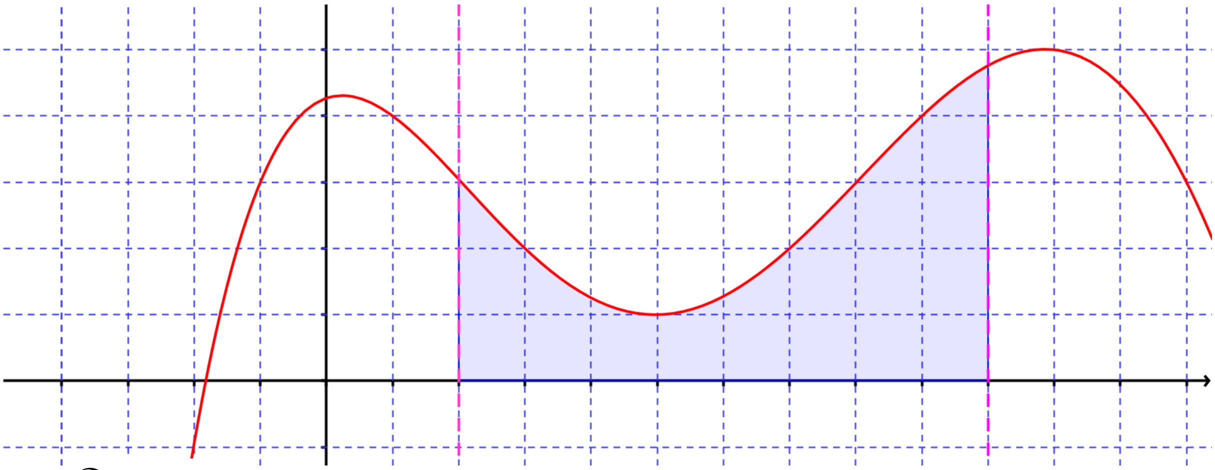
Intégration.

I. Définition d'une intégrale.



Définition

Soit f une fonction continue et <u>positive</u> sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On appelle <u>intégrale de f sur $[a\ ;\ b]$</u> l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note cette aire : $\int_a^b f(x)dx\ u.a$

☑ <u>Savoir-faire : Savoir trouver graphiquement un encadrement d'une intégrale :</u>

On a représenté dans le repère ci-contre une fonction f.

Le repère a pour unité 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1) Quelle est la valeur d'une unité d'aire en cm² ?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

2) Donne un encadrement de $A = \int_1^3 f(x)dx$ en unité d'aire.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

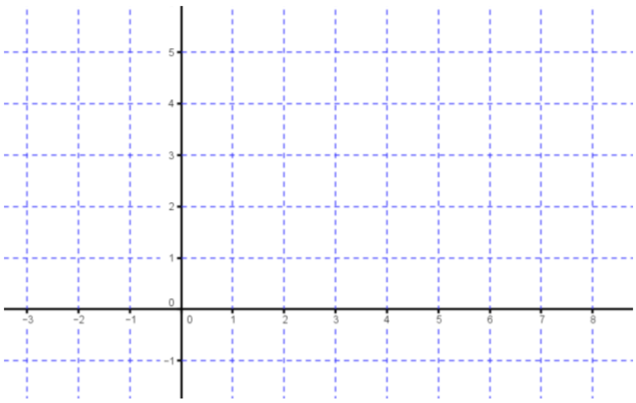
…………………………………………………………………………………

3) Donne un encadrement de $A = \int_1^3 f(x)dx$ en cm².

……

☑ <u>Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale par calcul d'aire :</u>

1) Dans le repère ci-contre, Construit la représentation graphique de la fonction f d'expression $f(x) = x + 3$.



…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

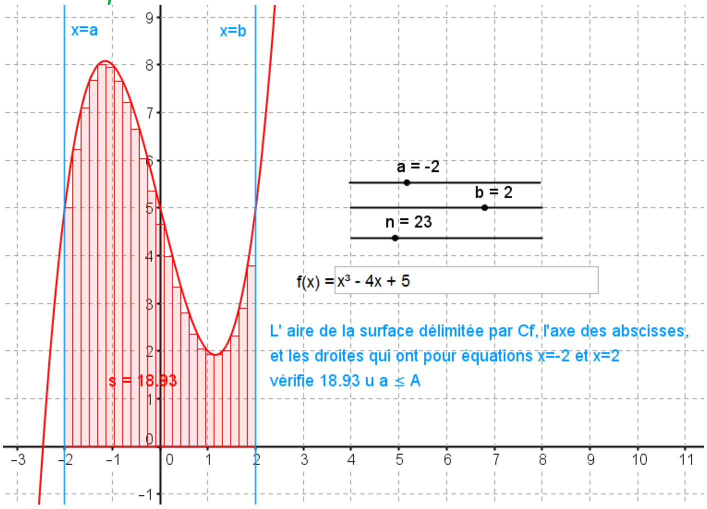
2) Calcule $A = \int_{-1}^{2} f(x)dx$.

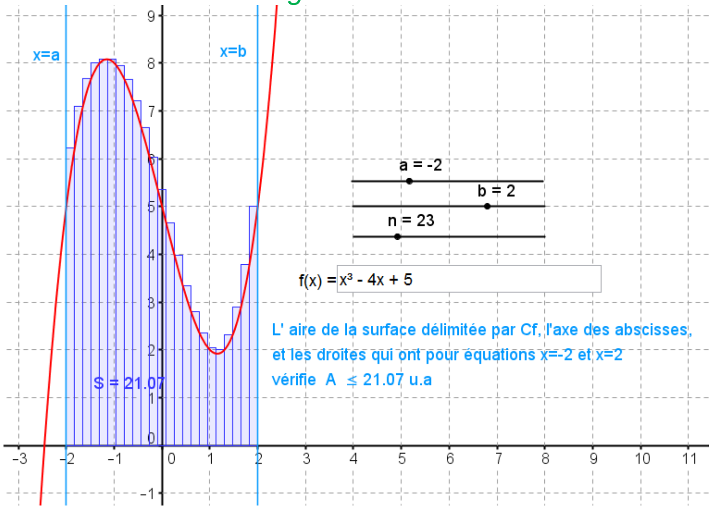
…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Remarque :
On peut affiner l'encadrement de l'aire de la surface en utilisant des rectangles.





II. Calcul d'intégrales.

Définition

Soit f une fonction continue et <u>positive</u> sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.
Alors : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

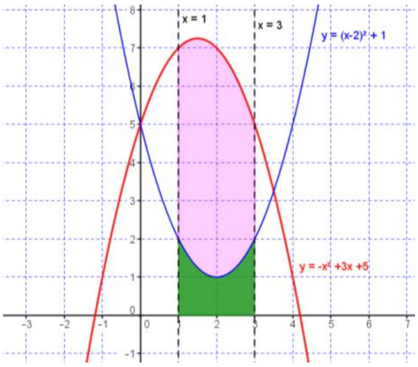
☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale :*

1) *On considère la fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x + 5$.*
Donne la valeur exacte de $A = \int_{-2}^{2} f(x)dx$.

2) *Calcule la valeur exacte de :* $A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx$; $B = \int_2^5 \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx$ *et* $C = \int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx$.

Remarque : Le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie :

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer l'aire d'une surface délimitée par deux courbes :*



On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = (x-2)^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 5$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle [1 ; 3].

………

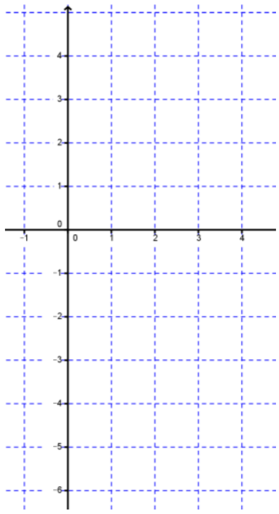
………

………

………

………

III. Intégrale d'une fonction négative.



Exemple 1 : calcule $A = \int_1^3 -2x\,dx$.

………

………

………

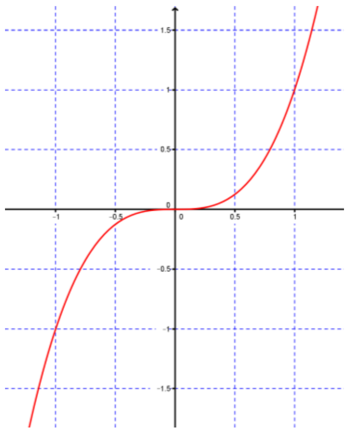
………

Remarque :

………

………

Exemple 2 : calcule $A = \int_{-1}^{1} x^3 dx$.



………

………

………

………

………

………

………

IV. Propriétés du calcul intégral.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.
Alors : ★ $\int_a^a f(x)dx = 0$. ★ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.
Alors : ★ $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Propriété de linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I. Alors :
★ $\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$. (pour tout nombre k) ★ $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Exemples :

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

Alors :

★ *Si pour tout* x *de* $[a;b]$, $f(x) \geq 0$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

★ *Si pour tout* x *de* $[a;b]$, $f(x) \leq 0$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

Alors :

★ *Si pour tout* x *de* $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

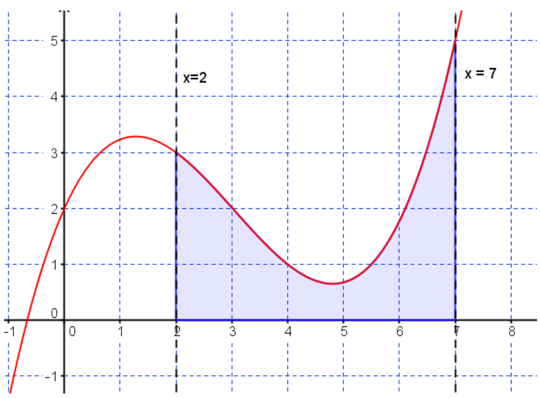
Exemples :

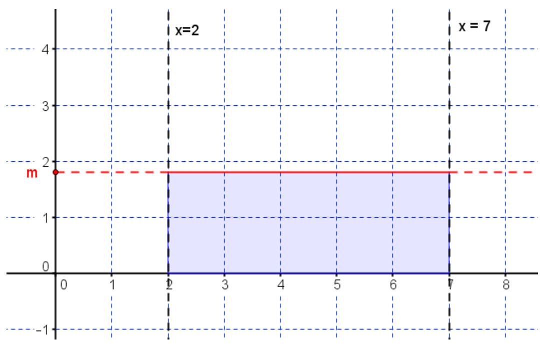
☑ *Savoir-faire : Savoir encadrer une intégrale :*

1) *Montrer que pour tout x appartenant à [0 ; 1], On a* $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

2) *En déduire que* $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq e - 1$.

IV. Valeur moyenne d'une fonction.





Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec a ≠ b.
On appelle <u>valeur moyenne</u> de f sur $[a\ ;\ b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer la valeur moyenne d'une fonction :*

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [0 ; 5].

....

....

....

☑ *Amérique du nord 2013 :*

On considère la fonction f définie sur R dont la courbe représentative *Cf* est tracée ci-contre dans un repère orthonormé.

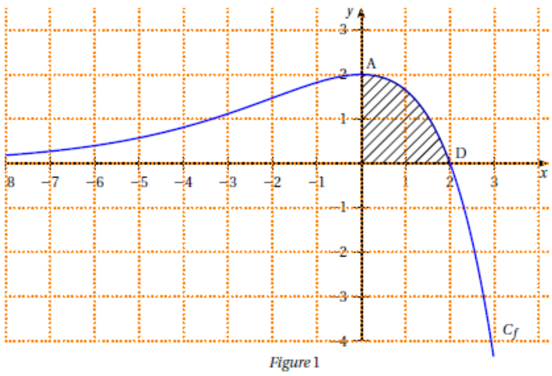


Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b-x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur ℝ.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b-2 = 0 \\ ab-1 = 0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

....

....

....

....

....

....

....

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)e^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ est comprise entre 2 et 4.
2. a. On considère F la fonction définie sur ℝ par $F(x) = (-2x+8)e^{0,5x}$.
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur ℝ.
   b. Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x)\,dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère G une autre primitive de f sur ℝ.
   Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.
   Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

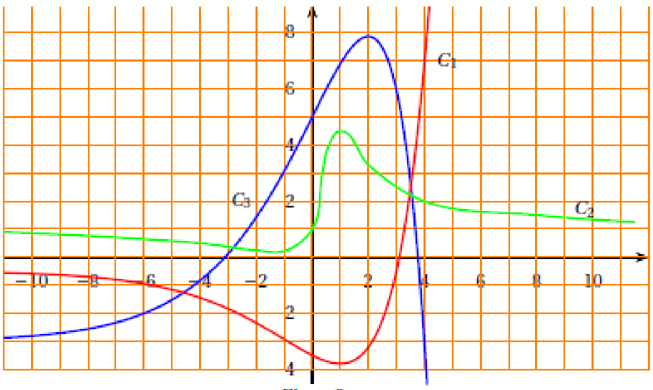


Figure 2

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....