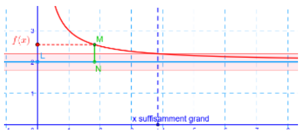
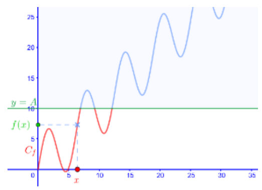
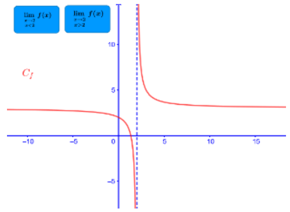
Limites, continuité et dérivation.

☺ Limites d'une fonction.







♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, $L\in\mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall$ A$\in$R, $\exists\ x_0$ / $\forall x \geq x_0$, $f(x) \geq$ A.

Asymptotes :

♦ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, Cf admet pour asymptote horizontale la droite : $y = a$.

♦ $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, Cf admet pour asymptote verticale la droite : $x = b$.

Limites de fonctions usuelles.

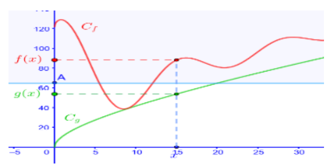
$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

Opérations sur les limites.

Formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty)$; $\infty \times 0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

Limites et comparaison.



Théorème de comparaison :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) \geq f(x)$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes):

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$ et $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$.

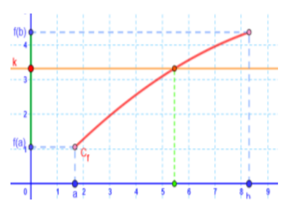
Limites de fonctions composées.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(g(x)) = \gamma$.

☺ Continuité.

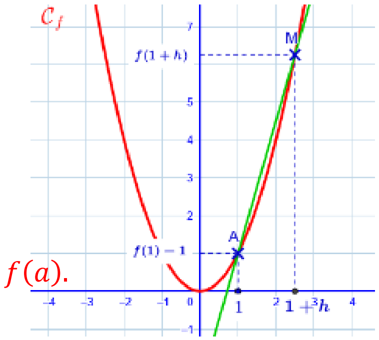
Déf : f est continue en $a\in$R, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Théorème des valeurs intermédiaires :



f est continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b]. Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur [a ; b].

☺ Dérivation.



Nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{h\to0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La tangente à Cf en a est la droite passant par $(a\,;f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation réduite est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Formules de dérivation :

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad (ku)' = k\,u'\ (k\in R)$

$(uv)' = u'v + v'u$ $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ $\qquad (u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$

Dérivées de fonctions composées :

$\left(f(ax+b)\right)' = a\,f'(ax+b)$

Dérivées de fonctions particulières :

$(e^x)' = e^x$ $\qquad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\ e^{u(x)}$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\qquad (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$ $\qquad (\sin(x))' = cos(x)$

Lien signes de la dérivée et variations de fonction :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Extremum d'une fonction :

Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Dérivation et continuité :

Th admis : Toute fonction dérivable est continue.