

Loi binomiale.

I. Répétition d'expériences identiques et indépendantes :

Exemples :

- 1) On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- 2) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Définition

Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :

- ◆ elles ont les mêmes issues
- ◆ chaque issue possède la même probabilité dans chaque expériences.

II. Schéma de Bernoulli :

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à 2 issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Exemples :

.....

.....

Définition

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec, on dit que X suit une loi de Bernoulli.

Exemple : Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire. Appelons « succès » l'événement S « Sortie du 6 ». Si le dé n'est pas truqué, on a $p(S) = \dots\dots\dots$ et $p(\bar{S}) = \dots\dots\dots$
 La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans les autres cas suit une loi de Bernoulli.

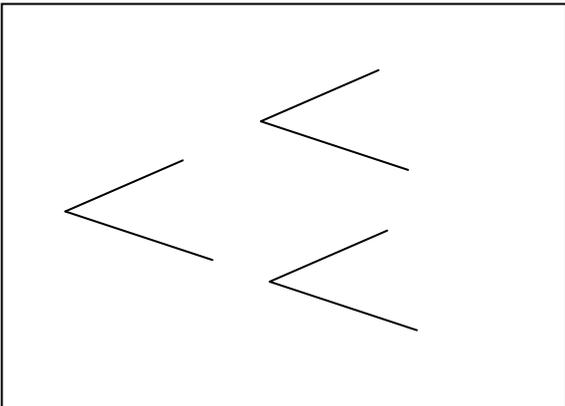
x_i	1	0
$p(X=x_i)$		

Définition

Lorsqu'on effectue la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, on dit qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

Exemple : On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
 ☺ On répète l'expérience deux fois de suite.
 On note B l'événement « On tire une boule blanche ». On peut représenter l'ensemble des issues par un arbre.



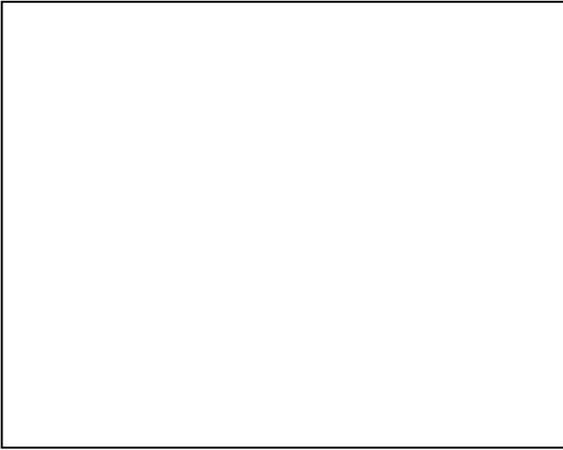
Soit X , la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues. Les valeurs prises par X sont

On a : $P(X=....) = \dots\dots\dots$
 $P(X=....) = \dots\dots\dots$
 $P(X=....) = \dots\dots\dots$

La loi de probabilité de X est donc :

L'espérance est $E(X) = \dots\dots\dots$

☺ On répète l'expérience trois fois de suite.



Soit X , la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues. Les valeurs prises par X sont

On a : $P(X=...) = \dots\dots\dots$

$P(X=...) = \dots\dots\dots$

$P(X=...) = \dots\dots\dots$

$P(X=...) = \dots\dots\dots$

La loi de probabilité de X est donc :

L'espérance est $E(X) = \dots\dots\dots$.

III. Loi binomiale :

Définition

On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès. La loi de probabilité de la variable aléatoire X comptant le nombre de succès est appelé loi binomiale de paramètre n et p . On note cette loi $B(n, p)$.

Reprenons les exemples précédents :

.....
.....
.....

☑ Savoir faire : Savoir déterminer $B(3, p)$ avec un arbre:

On réalise un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès.



Soit X , la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus. Les valeurs prises par X sont.....

On a :

$P(X=...) = \dots\dots\dots$

$P(X=...) = \dots\dots\dots$

$P(X=...) = \dots\dots\dots$

$P(X=...) = \dots\dots\dots$

La loi de probabilité de X est donc :

Remarque : Dans l'arbre précédent, il existe..... chemins réalisant 2 succès pour 3 répétitions. On dit aussi qu'il y a ... combinaisons de 2 succès parmi 3 répétitions. On appelle ce nombre un coefficient binomial et on le note :

Définition

On appelle $\binom{n}{k}$ un coefficient binomial. C'est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre représentant l'expérience.

☑ Savoir-faire : Savoir calculer avec une calculatrice un coefficient binomial $\binom{n}{k}$:

	Casio	Texas	Tableur
	Touche OPTN , puis choisir \triangleright puis PROB puis nCr	Touche MATH , puis choisir PRB , puis Combinaison	Fonction COMBIN
Syntaxe	$n \mathbf{nCr} k$	$n \mathbf{Combinaison} k$	=COMBIN(n;k)

1) Dans un arbre représentant 10 lancers d'une pièce équilibrée, combien y aura-t-il de chemins ayant exactement 3 Piles ?

.....

2) Calcule le nombre de combinaisons de 20 succès parmi 40 épreuves.

.....

Propriété

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètre n et p .

La probabilité d'obtenir k succès est : $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une probabilité en utilisant la loi binomiale :

1) Dans un jeu de 52 cartes, on tire 100 cartes avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 30 fois un roi ?

.....

.....

2) A Kuala Lumpur, 70% des personnes ont un ipad. On interroge 100 personnes. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 50 possesseurs d'un ipad ?

.....

.....

Propriété

L'espérance d'une loi binomiale de paramètre n et p est : $E(X) = np$

☑ Savoir-faire : Savoir calculer l'espérance de la loi binomiale :

1) Dans un jeu de 52 cartes, on tire 100 cartes avec remise. On réalise l'expérience plusieurs fois, combien va-t-on en moyenne obtenir de rois ?

.....

.....

2) A Kuala Lumpur, 70% des personnes ont un ipad. On interroge 100 personnes. On réalise l'expérience plusieurs fois, combien va-t-on en moyenne obtenir de possesseurs d'un ipad ?

.....

.....

☑ Savoir-faire : Savoir obtenir la loi binomiale avec un tableur :

On lance une pièce équilibrée 100 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 40 fois Pile ?

.....

.....

	Casio	Texas	Open Office	Excel
Syntaxe	Touche OPTN , puis choisir STAT , puis DIST , puis BINM , puis Bpd ou Bcd (voir p. 278).	Menu <i>distrib</i> (2^{nde} var), puis choisir <i>binomFdp</i> (ou <i>binomFRép</i> , voir p. 274).	Fonction LOI.BINOMIALE	
$P(X = k)$	BinominalPD(k,n,p)	binomFdp(n,p,k)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX)
$P(X \leq k)$	BinominalCD(k,n,p)	binomFRép(n,p,k)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)	=LOI.BINOMIALE(k;n;p;VRAI)

IV. Utiliser des outils pour la loi binomiale :

On considère l'expérience aléatoire « on lance une pièce de monnaie équilibrée ». On répète l'expérience 20 fois. Soit X , la variable aléatoire qui compte le nombre de « Pile » obtenus. Les expériences sont identiques et indépendantes, X suit donc la loi binomiale

On utilise un tableur pour obtenir la loi de probabilité de X et on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p(X=k)$	9.53674E-07	1.907E-05	2E-04	0.001	0.005	0.015	0.037	0.074	0.12	0.16	0.176	0.16	0.12	0.074	0.037	0.015	0.005	0.001	2E-04	2E-05	1E-06

1. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu exactement 8 fois « Pile ».

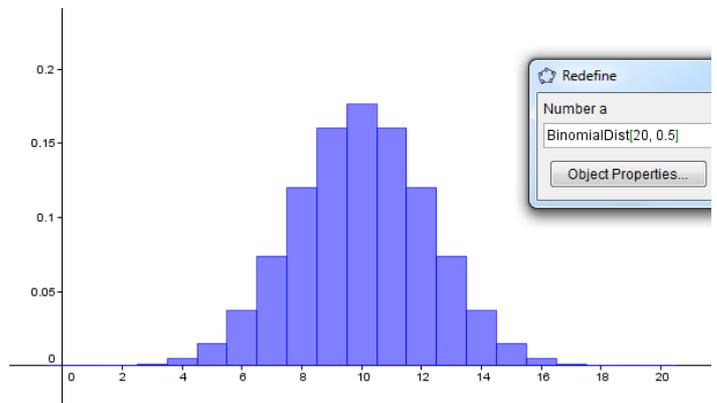
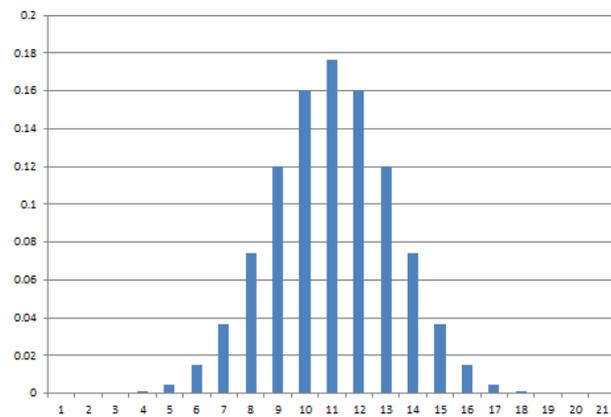
Vérifie avec la formule :

2. A l'aide du tableau, déterminer $p(X=12)$; $p(X=18)$; $p(X \leq 3)$; $p(6 \leq X \leq 9)$

On peut représenter la loi binomiale par un diagramme en bâtons

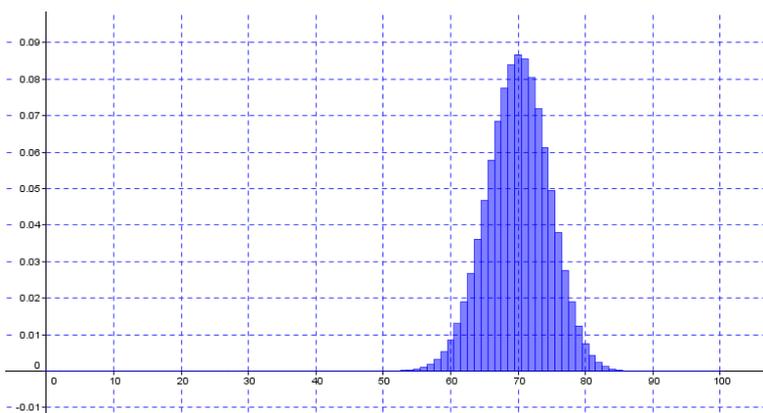
☺ Avec le tableur :

☺ Avec le tableur géogébra :



Remarque : L'espérance de la loi binomiale $B(40, 0,5)$ est cela correspond à

Savoir-faire : Savoir utiliser un diagramme en bâton qui représente la loi binomiale :



1) On a représenté par un diagramme en bâton une loi binomiale de paramètre n et p . On sait que $n=100$ et que son espérance est 70. Calcule p .

2) Imagine un énoncé qui soit cohérent avec cette représentation.