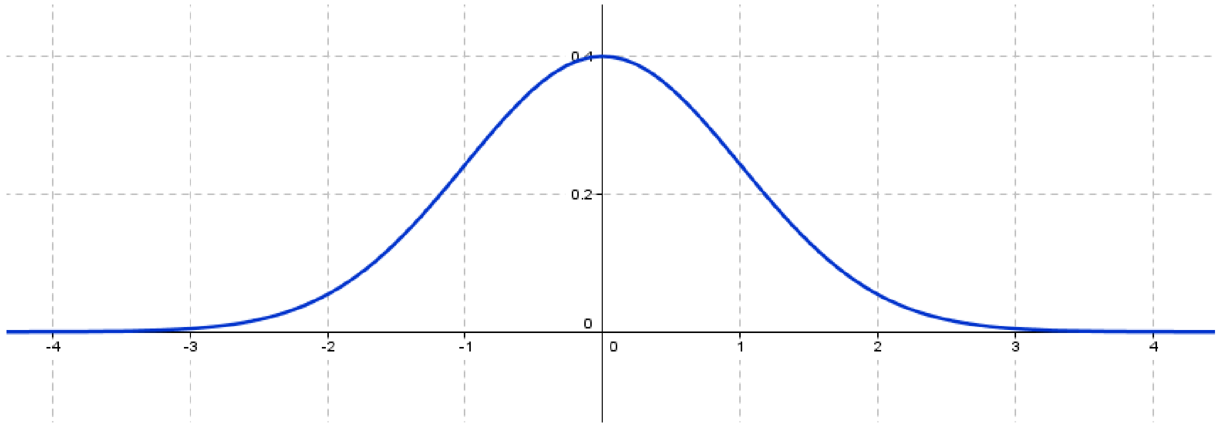
Loi normale.

I. Loi normale centrée et réduite $N(0\,;1)$.

Définition

On appelle loi normale centrée réduite la loi ayant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



Cette courbe a la particularité d'avoir une forme de cloche rappelant la représentation graphique de la loi

Remarque : Il n'est pas possible de déterminer une primitive de f donc les calculs de probabilité suivant la loi normale ne se font pas par du calcul d'intégrale, mais en utilisant la calculatrice.

☑ Savoir faire : Savoir calculer des probabilités suivant la loi normale $N(0\,;1)$:

X est une variable aléatoire qui suit loi normale centrée réduite.
Calculer :

- $P(-1{,}96 \le X \le 1{,}96)$

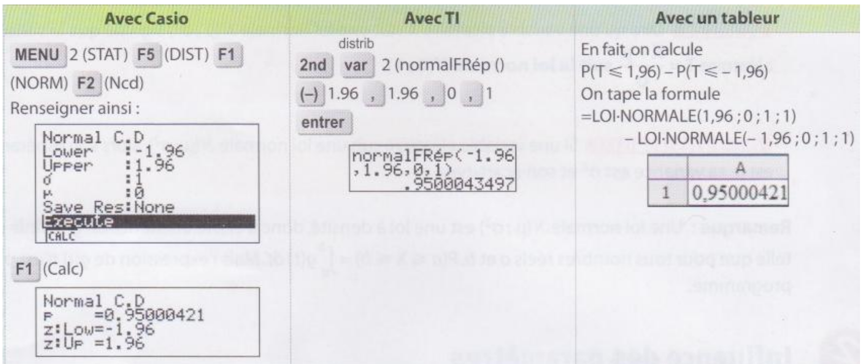
....

- $P(X \le 1)$

....

- $P(0{,}5 \le X)$

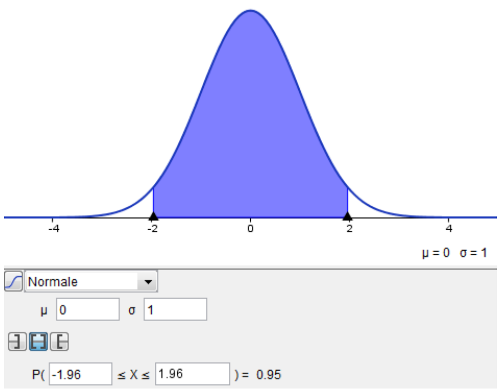
....



Avec Casio	Avec TI	Avec un tableur
MENU 2 (STAT) F5 (DIST) F1 (NORM) F2 (Ncd) Renseigner ainsi : Normal C.D Lower :-1.96 Upper :1.96 σ :1 μ :0 Save Res:None Execute CALC F1 (Calc) Normal C.D p =0.95000421 z:Low=-1.96 z:Up =1.96	distrib 2nd var 2 (normalFRép () (–) 1.96 , 1.96 , 0 , 1 entrer normalFRép(-1.96,1.96,0,1) .9500043497	En fait, on calcule P(T ⩽ 1,96) – P(T ⩽ – 1,96) On tape la formule =LOI·NORMALE(1,96 ; 0 ; 1 ; 1) – LOI·NORMALE(– 1,96 ; 0 ; 1 ; 1) A 1 0,95000421

Définition

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$ *alors* $P(-1{,}96 \le X \le 1{,}96) = 0{,}95$.



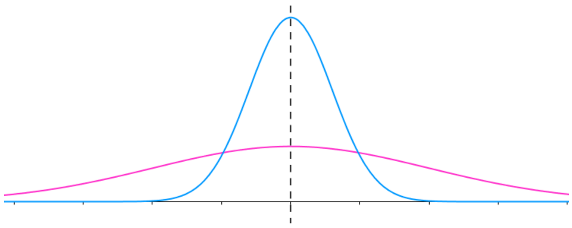
Remarque : le logiciel géogébra permet de calculer des probabilités suivant loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$ *en donnant un représentation de la surface dont on calcule l'aire.*

II. Loi normale $N(\mu\,;\sigma^2)$.

Définition

Soit un nombre réel μ et un nombre réel strictement positif σ. Dire qu'une variable aléatoire continue X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, notée $N(\mu\,;\sigma^2)$, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………



☑ Savoir faire : Savoir calculer des probabilités suivant la loi normale $N(\mu\,;\sigma^2)$:

Les températures du mois de juillet autour du Lac Léman suivent la loi normale d'espérance 18,2° et d'écart-type 3,6°. Une personne part camper en juillet. Quelle est la probabilité que la température soit :

- *Inférieure à 16°*

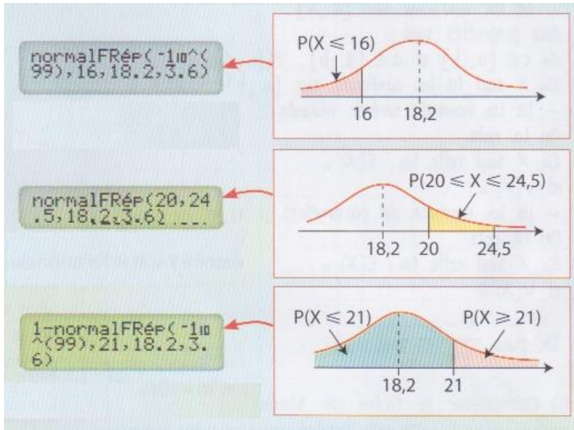
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

- *Comprise entre 20° et 24,5°*

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

- *Supérieure à 21°*

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………



☑Centres Etrangers 12 juin 2013.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [20 ; 120].

a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.

b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale N (120, 400).

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J .

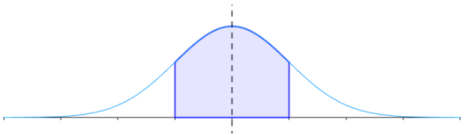
b. Montrer l'équivalence : $90 < J < 180 \Leftrightarrow -1{,}5 < \frac{J-120}{20} < 3$

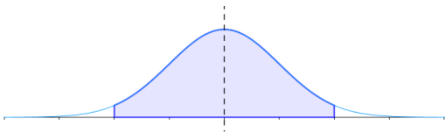
c. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J-120}{20}$ .Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

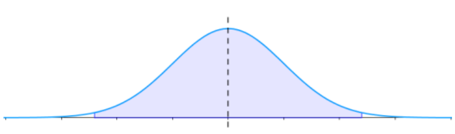
d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

A savoir : Si X est une variable aléatoire qui suit loi normale $N(\mu ; \sigma^2)$. Alors



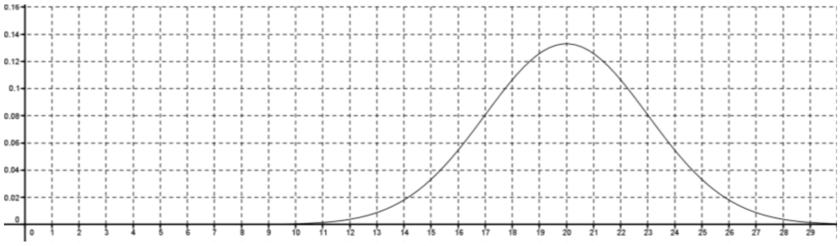




♦ $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$ ♦ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$ ♦ $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer les bornes d'un intervalle:*

Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 3. Déterminer a et b tels que $P(a \leq X \leq b) \approx 0{,}954$.



……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

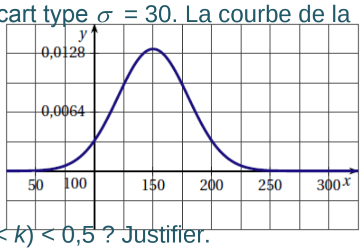
☑ *Polynésie 7 juin 2013.*

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats **4 points**

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A. Étude de la zone 1

On note *X* la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm. Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire *X* suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à *X* est représentée ci-contre.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.

2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.

3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm. On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.

4. On considère un nombre *k* strictement plus grand que la valeur moyenne μ. Est-il vrai que $P(X < k) < 0{,}5$? Justifier.

……

……

……

……

……

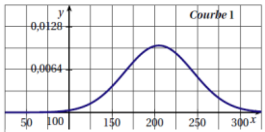
B. Étude de la zone 2

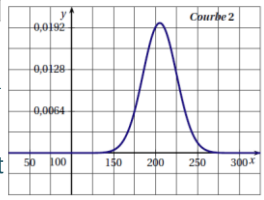
1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.

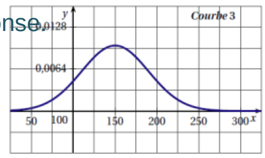
a. Calculer la fréquence *f* de poissons malades dans l'échantillon.

b. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95%, de la proportion *p* de poissons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.

2. Soit *Y* la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire *Y* suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma = 40$.En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-contre représente la densité de probabilité de la variable aléatoire *Y* . Justifier la réponse.







……

……

……

……

……

……

III. De la loi binomiale à la loi normale.