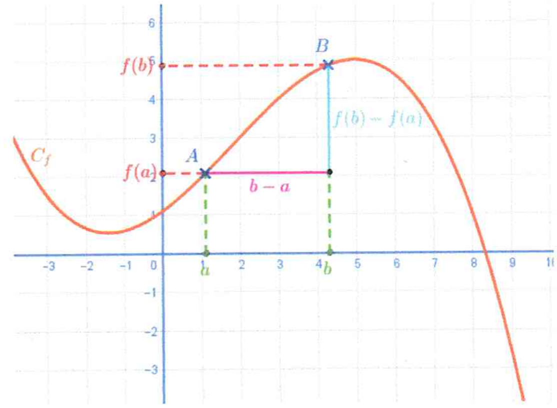
Nombre dérivé.

Isaak Newton (1642 ; 1727) et Gottfried Leibniz (1646 ; 1716) développe chacun de leur côté l'étude des tangentes à une courbe et des infiniment petits.

I. Taux de variation d'une fonction.



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et b deux nombres distincts appartenant à I. On appelle taux de variations de la fonction f entre a et b le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Remarque : Le taux de variation de f entre a et b, est le coefficient directeur (la pente) de la droite (AB).

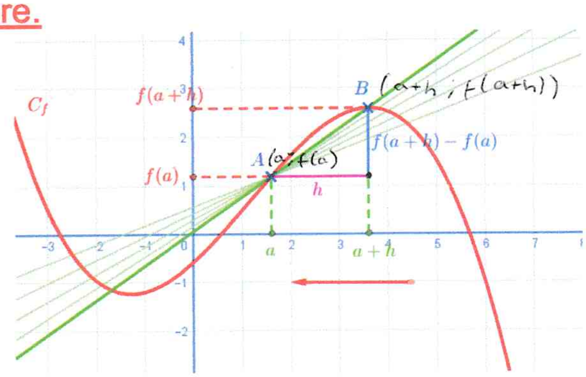
En Physique si y=f(x), on note le taux de variation : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Propriété :

- Si f est croissante sur I alors le taux de variation de f entre 2 nombres distincts de I est positif
- Si f est décroissante sur I alors le taux de variation de f entre 2 nombres distincts de I est négatif

Attention : La réciproque est fausse : contre exemple : le taux de la variation de la fonction carré entre -1 et 2 est $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{3}{3}=1$, donc positif mais la fonction carré n'est croissante sur $[-1 ; 2]$.

II. Nombre dérivé d'une fonction en un nombre.



Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Soit un réel $a \in$ I et $h \neq 0$, tel que $a+h \in$ I.
Soit $A(a)$ et $B(a+h)$ deux points de Cf.
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Lorsque le point B se rapproche du point A, la pente de la droite (AB) est égale à $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Lorsque cette limite existe, on appelle cette pente le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, un réel $a \in$ I, soit $h \neq 0$ tel que $a+h \in$ I.
On dit que f est dérivable en a, lorsque le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet pour limite un nombre lorsque h tend vers 0.
On appelle ce nombre, le nombre dérivé de f en a *et* on le note $f'(a)$.
On a donc $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$

Remarque : le nombre dérivé est donc le coefficient directeur de la droite (ab) lorsque b s'est rapproché de a.

☑Savoir-faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par le calcul :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par. $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Calculer $f'(2)$.

$\cdot f(2) = 5 \quad \cdot f(2+h) = (2+h)^2 + 2(2+h) - 3 = h^2 - 6h + 5$

$\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 5}{h} = \dfrac{h^2 + 6h}{h} = \dfrac{h(h+6)}{h}$

$= h + 6$

Donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} h + 6 = 6$

Donc f est dérivable en 2, et le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = 6$

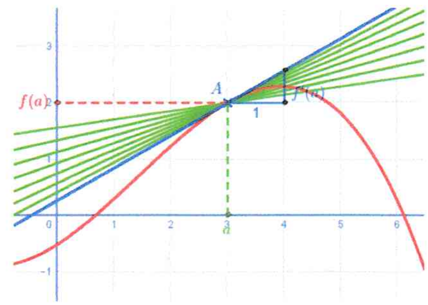
2) Prouve que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro.

Démonstration exigible :

$f(x) = \sqrt{x}$, $x = 0$ $\quad \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ ($h \geq 0$ car $\sqrt{h}$ existe).

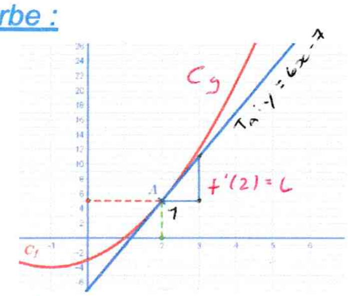
Donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ ($\lim_{h \to 0} \sqrt{h} = 0$, donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ voir tableau) Don la fonction f n'est pas dérivable en 0.

III. Tangente à une courbe.



Définition : Soit f une fonction dérivable en a et A le point de Cf de coordonnées $A\,(a\,;\,f(a))$.
La tangente à la courbe Cf au point A est la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$

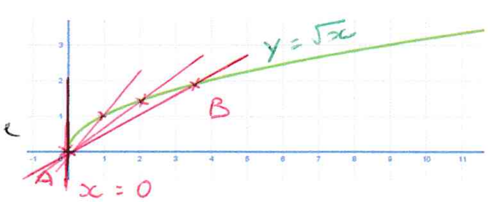
☑Savoir-faire : Savoir déterminer l'équation d'une tangente á une courbe :



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Déterminer une équation de tangente à Cf au point A de la courbe d' abscisse 2.

On a déjà calculé que f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6$. $f(2) = 5$. Donc $A(2\,;\,5)$. La tangente à C_f en A est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(2) = 6$

Donc son équation est de la forme $y = 6x + p$. $A \in T_A$ donc $y_A = 6x_A + p$
$\Rightarrow 5 = 6 \times 2 + p \Rightarrow p = -7$ Donc $T_A : y = 6x - 7$



Remarque : La fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, elle a pourtant une tangente en 0, mais une tangente qui est vertical, donc pas de coefficient directeur.

Propriété :

Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point $A\,(a\,;\,f\,(a))$ une tangente T_A qui a pour équation : $y = \underline{f'(a)} \times (x - a) + f\,(a)$.

Démonstration exigible :

La tangente à C_f en $A(a ; f(a))$ a pour coefficient directeur $f'(a)$ donc une équation de la forme $y = f'(a)x + p$. $A \in T_A$ donc $y_A = f'(a)\,x_A + p$ soit $f(a) = f'(a) \times a + p$. Donc $p = f(a) - f'(a) \times a$.
Donc T_A a pour équation $y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$.
Soit $T_A : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

☑ ***Savoir-faire : Savoir déterminer l'équation d'une tangente par le calcul :***

Détermine l'équation de la tangente à la courbe de la fonction carrée en 1.

$f(x) = x^2$, $a = 1$ $\quad \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h$

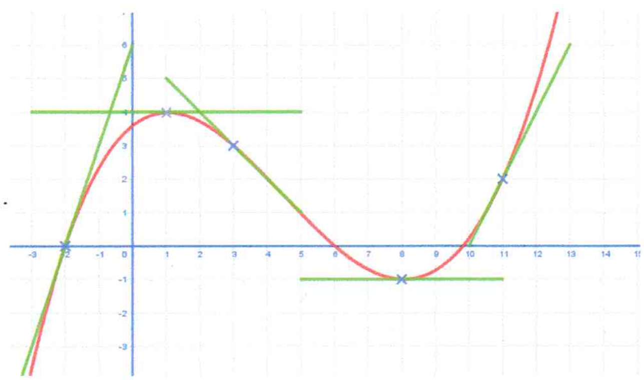
Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2 + h = 2$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$. Donc la tangente à C_f en 1 a pour équation $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$
$y = 2(x - 1) + 1$ | $y = 2x - 1$

Remarque : Lorsque la tangente est représentée graphiquement, on peut lire graphiquement un nombre dérivé.

☑ ***Savoir-faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par lecture graphique :***

On donne ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f ainsi que certaines de ses tangentes.



1) Détermine $f(-2)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(8)$ et $f(11)$.

$f(-2) = 0$, $f(1) = 4$, $f(3) = 3$, $f(8) = -1$, $f(11) = 2$

2) Détermine $f'(-2)$; $f'(1)$; $f'(3)$; $f'(8)$ et $f'(11)$.

$f'(-2) = 3$, $f'(1) = 0$, $f'(3) = -1$, $f'(8) = 0$
$f'(11) = 2$ ($f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en -2.)

3) Détermine l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

Le point de C_f qui a pour abscisse 3 a pour ordonnée $f(3) = 3$.
La tangente à C_f en 3 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc une équation de la forme $y = mx + p$. Son coefficient directeur est $f'(3) = -1$, on a donc $y = -x + p$. Elle passe par $A(3 ; 3)$ donc $y_A = -x_A + p$ soit $3 = -3 + p$, donc $p = 6$.
Donc l'équation de la tangente à la courbe au point qui a pour abscisse 3 est $y = -x + 6$.