Calcul littéral.

I. Introduction.

Souvent en mathématiques, pour écrire une formule ou pour simplifier un problème on a besoin d'utiliser des lettres plutôt que des nombres, on dit alors qu'on écrit une ...expression littérale...

Exemple : un savant a créé une machine qui transforme les nombres, « si on entre un nombre, elle le multiplie par 3 puis elle ajoute 5 », on traduit cette phrase par « si on rentre un nombre a, elle calcule ..$a \times 3 + 5$..... »

Un nombre est représenté par une ....lettre appellée variable...

Convention d'écriture : Pour ne pas qu'il y ait de confusion entre la lettre x et le symbole $\times$, dans une expression littérale on évite autant que possible d'écrire le symbole $\times$.

Exemple : $3 \times a + 5 =$ ..$3a+5$..; $a \times b =$ ..ab...; $a \times 3 \times b =$ $a.3.b$ / $3ab$; $2 \times 3 \times \pi =$ $2 \times 3 \times \pi$ / 6π

☺ Addition de deux nombres.

La somme de deux nombres a et b se note $\boxed{a+b}$.

$\boxed{2a}$ s'appelle le ..double.. du nombre a et se note $\boxed{a+a=2\times a=2a}$.

$\boxed{3a}$ s'appelle le ..triple... du nombre a et se note $\boxed{a+a+a=3\times a=3a}$.

☺ Soustraction de deux nombres.

Définition

Deux nombres sont dit opposés.. lorsque ..leur somme est zéro.......

....

L'**opposé** du nombre a se note $-a$... Il vérifie $\boxed{a + (-a) = 0}$ et $\boxed{-a = a \times (-1)}$.

Remarque : Deux nombres opposés sont de ..signes différents.........

Pour tout nombre x, on a : . Si x est positif alors $-x$ est ..négatif......

. Si x est négatif alors $-x$ est ..positif....... (☛ si $x = (-3)$ alors $-x = 3$)

La différence de deux nombres a et b se note $\boxed{a-b}$.

Propriété

Soustraire un nombre revient à ..additionner son opposé.................

.......ex. $2x - 1 = 2x + (-1)$.........

☺ Le produit de deux nombres a et b se note $\boxed{ab}$.

$\boxed{a^2}$ s'appelle le ..carré....... du nombre a et se note $\boxed{a \times a = a^2}$.

$\boxed{a^3}$ s'appelle le ..cube....... du nombre a et se note $\boxed{a \times a \times a = a^3}$.

☺ Division de deux nombres.

Définition

Deux nombres sont dit inverse. lorsque ..est égal à 1..............

....

L'**inverse** d'un nombre a non nul se note $\frac{1}{a}$... Il vérifie $\boxed{\frac{1}{a} \times a = 1}$ et $\boxed{a : a = 1}$.

Remarque : Deux nombres inverses sont de ..même signes.............

Le quotient de deux nombres a et b se note $\boxed{a:b}$ $\frac{a}{b}$. C'est le nombre qui vérifie $\boxed{b \times \frac{a}{b} = ...}$

Propriété

diviser par un nombre revient à multiplier son inverse

Traduction en language mathématique

$a : b = a \times \frac{1}{b}$

II. Remplacer une lettre par une valeur.

Pour remplacer une lettre par une valeur, dans une expression littérale, il suffit d'écrire la valeur à la place de la lettre et puis on calcule.

☺ **Exemple 1 :** **A = 3a + 5**

Calcule A si **a = 4.**

$A = 3 \times 4 + 5$

$A = 17$

☺ **Exemple 2 :** **B= x² + 3x -1**

Calcule B si **x = 5.**

$B = 5 \times 5 + 3 \times 5 - 1$

$B = 25 + 15 - 1 = 39$

Comme la valeur de l'expression littérale dépend de la valeur de la variable, on écrit $A(4) = 17$......

Attention cette notation n'est pas au programme, mais elle permet d'écrire plus simplement : « calcule la valeur de l'expression A lorsque $x = 4$ » s'écrit « calcule A(4) »

III. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

a) La simple distributivité.

On calcule de deux façons l'aire du rectangle ACDF.

- En utilisant les deux petits rectangles

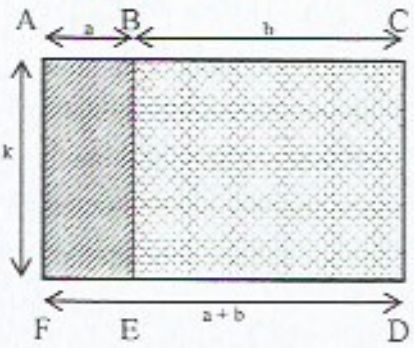
$\mathcal{A}_{ACDF} = \mathcal{A}_{ABEF} + \mathcal{A}_{BCDE} = AB \times AF + BC \times AF = k \times a + k \times b$

- Directement :

$\mathcal{A}_{ACDF} = AC \times AF = k \times (a+b)$

On vient de montrer que pour tous nombres non nuls k, a et b.

$k(a+b)$ ..... = $ka + kb$..........



Propriété (admise)

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Savoir-faire

☺ $A(a) = 3 \times (a + 5)$ ☺ $B(x) = 3(x + 4)$ ☺ $C(x) = 4x(2x - 4)$

$A(a) = 3 \times (a + 5)$	$B(x) = 3(x + 4)$	$C(x) = 4x(2x - 4)$
Donc $A(a) = 3 \times a + 3 \times 5$....	Donc $B(x) = 3x + 3 \times 4$.....	Donc $C(x) = 4x \times 2x + 4x \times 4$
Donc $A(a) = 3a + 15$.....	Donc $B(x) = 3x + 12$.....	Donc $C(x) = 8x^2 - 16x$

b) La double distributivité.

On calcule de deux façons l'aire du rectangle ACIG.

- En utilisant les quatre petits rectangles

$\mathcal{A}_{ACIG} = \mathcal{A}_{ABEF} + \mathcal{A}_{BCDE} + \mathcal{A}_{FEHG} + \mathcal{A}_{EDIH}$

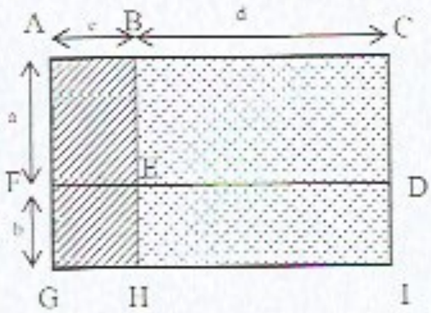
$= a \times c + a \times d + b \times c + b \times c$

$= \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$

- Directement : $\mathcal{A}_{ACDF} = (a+b) \times c \ldots = (a+b) \times d \ldots$

On vient de montrer que pour tous nombres réels a, b, c et d.

$(a+b)(c+b) = ac + ad + bc + bd$



Propriété (admise)

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ pour tous nombres a, b, c et d

Savoir-faire

Développe les expressions suivantes

☺ $A(x) = (2x+3)(4x+5)$ ☺ $B(x) = (x-3)(2x-5)$ ☺ $C(x) = 2(3x-1)(2x+4)$

$A(x) = (2x+3)(4x+5)$	$B(x) = (x-3)(2x-5)$	$C(x) = -2(3x-1)(2x+4)$
Donc $A(x) = 2x \times 4x + 2x \times 5 + 3 \times 4x + 3 \times 5$	Donc $B(x) = x \times 2x - x \times 5 - 3 \times 2x + 3 \times 5$	Donc $C(x) = -2(6x^2 + 12x - 2x - 4)$
Donc $A(x) = 8x^2 + 10x + 12x + 15$	Donc $B(x) = 2x^2 - 5x - 6x + 15$	Donc $C(x) = -2(6x^2 + 10x - 4)$
Donc $A(x) = 8x^2 + 22x + 15$	Donc $B(x) = 2x^2 - 11x + 15$	Donc $C(x) = -12x^2 - 20x + 8$

c) Egalités remarquables.

Propriété

Pour tous nombres a et b $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemples :

$A(x) = (2x+3)^2$	$B(x) = (4x+5)^2$	$C(x) = 25x^2 + 30x + 9$
Donc $A(x) = 2x^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$	Donc $B(x) = 4x^2 + 2 \times 4x \times 5 \times 5^2$	Donc $C(x) = 5x + 2 \times 5 \times 3 + 9$
Donc $A(x) = 2x^2 + 12x + 9$	Donc $B(x) = 16x^2 + 40x + 25$	Donc $C(x) = (5x+3)^2$
Donc $A(x) = \ldots$	Donc $B(x) = \ldots$	Donc $C(x) = \ldots$

Propriété

Pour tous nombres a et b $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemples :

$A(x) = (2x-3)^2$	$B(x) = (3x-4)^2$	$C(x) = x^2 - 2x + 1$
Donc $A(x) = 4x^2 - 2 \times 2x \times 3 + 9$	Donc $B(x) = 9x^2 - 2 \times 3x \times 4 + 16$	Donc $C(x) = (x+1)^2$
Donc $A(x) = 4x^2 - 12x + 9$	Donc $B(x) = 9x^2 - 24x + 16$	Donc $C(x) = \ldots$
Donc $A(x) = \ldots$	Donc $B(x) = \ldots$	Donc $C(x) = \ldots$

Propriété

Pour tous nombres a et b $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemples :

$A(x) = (3x-4)(3x+4)$	$B(x) = 9x^2 - 25$	$C(x) = (2x-3)^2 - (3x+5)^2$
Donc $A(x) = 9x^2 - 12x + 12x - 16$	Donc $B(x) = (3x)^2 - 5^2$	Donc $C(x) = [(2x-3) + (3x+5)][(2x-3) - (3x+5)]$
Donc $A(x) = 9x^2 - 16$	Donc $B(x) = \ldots$	Donc $C(x) = (5x+2)(-x+2)$
		Donc $C(x) = \ldots$

Exemple : 5⊕ + 3● - 2⊕ + 8● = 3⊕ + 11●

Définition

Réduire ...... une expression littérale signifie calculer ... les différentes variables identiques ....

Savoir-faire

Réduire les expressions suivantes

☺ $A(a) = 3a + 5 + 4a - 1$ ☺ $B(x) = 8x^2 + 5x + 6 - 2x^2 + 9$ ☺ $C(x) = 9x^2 - 3x + 5 - 12x^2 + 9x - 7$

$A(a) = 3a + 5 + 4a - 1$ Donc $A(a) = 7a + 4$

$B(x) = 8x^2 + 5x + 6 - 2x^2 + 9$ Donc B .... = ...

$C(x) = 9x^2 - 3x + 5 - 12x^2 + 9x - 7$ Donc C .... = ...

V. Développer et factoriser.

a) Produits et sommes.

Parmi les expressions suivantes, souligne en rouge les produit et en vert les sommes.

$A(a) = a + 5$; $B(y) = 3y$; $C(t) = 3(t + 5)$; $D(x) = 3x + 5$; $E(x) = (x + 2)(x - 1)$;

$F(x) = (x + 2) - (x - 1)$; $H(x) = (x + 2)^2$; $I(x) = 3x^2 + 2x - 4$; $J(x) = 4(x^2 + 2x) - 1$

b) Développer.

Définition

...développer... une expression littérale signifie transformer ... un produit en somme ......

☺ **Exemple 1 :**

$A(x) = 3(2x - 5) - 6(4x + 2)$

Donc $A(x) = 3 \times 2x - 3 \times 5 - (6 \times 4x + 6 \times 2)$

Donc $A(x) = 6x - 15 - 6 \times 4x - 6 \times 2$

$= 6x - 15 - 24x - 12$

$= -18x - 27$

☺ **Exemple 2 :**

$B(x) = 3x(2x - 1) - 5(4x - 2)$

Donc $B(x) = 6x^2 - 3x - 20x + 10$

Donc $B(x) = 6x^2 - 23x + 10$ .....

☺ **Exemple 3 :**

$C.... = 3(2x - 5)(4x + 2)$

Donc $C.... = 3(8x^2 + 4x - 20x - 10)$ ....

Donc $C.... = 3(8x^2 - 16x - 10)$ ....

Donc $C.... = 24x^2 - 48x - 30$ ....

☺ **Exemple 4 :**

$D.... = 2(2x - 1)(x + 2) - 3(x - 2)(x - 1)$

Donc $D.... = 2(2x^2 + 4x - x - 2) - 3(x^2 - x - 2x + 2)$

Donc $D.... = 4x^2 + 8x - 2x - 4 - 3x^2 + 3x + 6x - 6$

Donc $D.... = x^2 + 15x - 10$ ....

c) Factoriser.

Définition

Factoriser.... une expression littérale signifie ~~transformer~~ les différentes sommes en produit ....

☺ **Exemple 1 :**

$A(x) = 5x + 15$

Donc $A(x) = 5 \times x + 5 \times 3$ ....

Donc $A(x) = 5(x + 3)$ ....

Je cherche un facteur commun

$k \times a + k \times b = k(a + b)$

☺ **Exemple 2 :**

$B(x) = 3(x + 1)(2x - 1) + 2(x + 1)(5x + 4)$

Donc $B(x) = (x+1)[3 \times (2x - 1) + 2 \times (5x + 4)]$ ..

Donc $B(x) = (x+1)[6x - 3 + 10x + 8]$ ...

Donc $B(x) = (x+1)(16x + 5)$ ....

V. On joue avec une expression littérale.

Savoir-faire

On considère l'expression littérale suivante : $E(x) = (2x+3)^2 + (x-7)(2x+3)$

1. Développer et réduire $E(x)$.

2. Factoriser $E(x)$.

3. Résoudre l'équation : $(2x+3)(3x-4) = 0$.

4. Calculer la valeur de E pour $x = -2$; $x = 3$ et $x = 3\sqrt{2}$.

1) $E(x) = (2x+3)^2 + (x-7)(2x+3)$
$E(x) = 4x^2 + 2\times2x\times3 + 9 + 2x^2 + 3x - 14x - 21$
$E(x) = 6x^2 + 12x + 3x - 14x + 9 - 21$
$E(x) = 6x^2 + 1x - 12$

2) $E(x) = (2x+3)\times(2x+3) + (x-7)(2x+3)$
$E(x) = (2x+3)[(x-7)+(2x+3)]$
$E(x) = (2x+3)(x-7+2x+3)$
$E(x) = (2x+3)(3x-4)$

3) L'équation est de type produit nul. Une équation est de type produit nul si au moins un des deux facteurs est nul.

$2x+3 = 0$ ou $3x-4 = 0$
$2x = -3$ ou $3x = 4$
$x = \frac{-3}{2}$ ou $x = \frac{4}{3}$

Donc l'équation a deux solutions qui sont $\frac{-3}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

Savoir-faire

On considère l'expression : $D(x) = 9(2x+3)^2 - 25(x-4)^2$

1. Développer puis réduire $D(x)$.

2. Écrire $D(x)$ sous la forme d'un produit de 2 facteurs.

3. Calculer $D(2)$; $D(-1)$ puis $D(\sqrt{3})$.

4. Résoudre l'équation : $(11x-11)(x+29) = 0$

1- $D(x) = 9(2x+3)^2 - 25(x-4)^2$
$D(x) = 9(4x^2 + 6x + 6x + 9) - 25(x^2 - 4x - 4x + 16)$
$D(x) = 36x^2 + 54x + 54x + 81 - 25x^2 + 100x + 100x - 400$
$D(x) = 11x^2 + 308x - 319$

2- $D(x) = 9(2x+3)^2 - 25(x-4)^2$
$D(x) = [3(2x+3)]^2 - [5(x-4)]^2$
$D(x) = [3(2x+3) - 5(x-4)][3(2x+3) + 5(x-4)]$
$D(x) = (6x + 9 - 5x + 20)(6x + 9 + 5x - 20)$
$D(x) = (x + 29)(11x - 11)$

3- Calcule
$D(2) = 11\times2^2 + 308\times2 - 319$
$D(2) = 44 + 616 - 319$
$D(2) = 341$
$D(-1) = 11\times(-1)^2 + 308\times(-1) - 319$
$D(-1) = 11 - 308 - 319$
$D(-1) = -616$
$D(\sqrt{3}) = 11\times(\sqrt{3})^2 + 308\times\sqrt{3} - 319$
$D(\sqrt{3}) = 33 - 319 + 308\sqrt{3}$
$D(\sqrt{3}) = -286 + 308\sqrt{3}$

4- L'équation est de type produit nul. Une équation est de type produit nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.
$11x - 11 = 0$ ou $x + 29 = 0$
$11x = 11$ $\quad x = -29$
$x = \frac{11}{11} = 1$

Donc l'équation a deux solutions qui sont 1 et -29.