

Equations à une inconnue.

I. Introduction

Exemple : Je pense à un nombre, si j'ajoute 4 à ce nombre je trouve 18. Quel est le nombre auquel je pense ?

Une équation est une égalité... dans laquelle il faut trouver un nombre... inconnu.

Savoir la question est écrite en langage mathématique.....

Une réponse à la question s'appelle une résolution... de l'équation.

Definition

Résoudre une équation, c'est chercher la... ou... les valeurs d'un nombre inconnu... qui vérifient l'égalité... proposée. Ces valeurs sont appelées solutions de l'équation.

Remarque : une équation peut avoir plusieurs solutions.

En langage mathématique, une équation est composée de deux (parties), séparées par un signe "="
expressions

*** Attention :** ne pas confondre le statut de la lettre x

⊙ Dans une expression littérale, elle ne représente pas un nombre inconnu mais on peut lui donner n'importe quelle valeur... on l'appelle la variable.

⊙ Dans une équation, elle ne représente un ou plusieurs nombres inconnus qu'il faut trouver on l'appelle l'inconnue.

$A(x) = 2x + 4$... x est une variable... (E) : $2x + 4 = 13$... x est une valeur inconnue.....

II. Vérifier si un nombre est solution ou non d'une équation.

a) Tester une égalité.

Méthode

Il faut remplacer l'inconnue... par les nombres proposés dans chacun des membres de l'équation puis constater si l'égalité est vraie... ou non.

Savoir-faire

3 rend-il vrai l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$?

..... d'une part : $2 \times 3^2 - 5 = 13$ | Donc l'égalité est vraie
..... d'autre part : $3 + 10 = 13$ | $x = 3$

b) Vérifier si un nombre est solution ou non d'une équation.

Savoir-faire

Les nombres 4 et -5 sont-ils solutions de l'équation (E) : $2x - 3 = 3x + 2$.

Ce n'est pas la peine de résoudre l'équation.

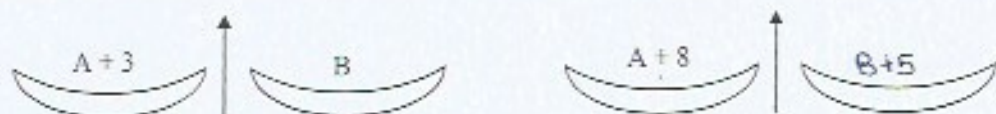
* $2 \times 4 - 3 = 5 = \dots$ de plus $3 \times 4 + 2 = 14 = \dots$ donc 4 n'est pas une solution de l'équation

* $2 \times (-5) - 3 = -13 = \dots$ de plus $3 \times (-5) + 2 = -13 = \dots$ donc -5 est une solution de l'équation

III. Égalités et opérations

a) Égalités et addition

Exemple : La première balance est en équilibre, complète la deuxième pour qu'elle le soit.



Règle

Une égalité reste VRAIE si on ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'équation

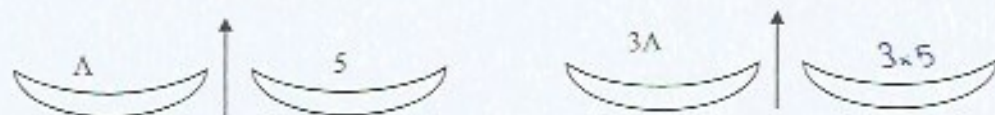
Traduction en langage mathématique

Soit A, B et n trois nombres, si $A = B$ donc alors $A + n = B + n$

Applications :

- Si a est un nombre tel que $a = 10$ alors on peut affirmer que $a + 8 = 18$
- Si b est un nombre tel que $b + 5 = 21$ alors on peut affirmer que $b = 16$
- Si x est un nombre tel que $x - 10 = 9$ alors on peut affirmer que $x = 19$

b) Égalités et multiplication



Règle

Une égalité reste VRAIE si on multiplie ou on divise par un même nombre les deux membres de l'équation

Traduction en langage mathématique

Soit A, B et n trois nombres, si $A = B$ donc $A \times n = B \times n$

Applications :

- Si a est un nombre tel que $a = 10$ alors on peut affirmer que $2a = 2 \times 10 = 20$
- Si b est un nombre tel que $5b = 30$ alors on peut affirmer que $b = \frac{30}{5}$ donc $b = 6$
- Si x est un nombre tel que $x = 9$ alors on peut affirmer que $-4x = -36 = 9 \times (-4)$
- Si x est un nombre tel que $-6x = 42$ alors on peut affirmer que $x = \dots$ donc $x = \dots$

IV. Résolution d'équation

a) Degré d'une équation

Définition

résoudre une équation, c'est trouver la ou les valeurs de l'inconnue qui vérifie l'égalité.

Le degré d'une équation est la plus grande puissance de l'inconnue

Exemples :

$$3 + x^2 + x^3 = 1 \text{ degré est } 3$$

$$3 + x^2 + 1 = 0 \text{ on dit degré } 2$$

b) Equations du premier degré.

Toute équation du premier degré est équivalente à une équation de la forme (E) : $ax = b$.

Savoir-faire

Résoudre l'équation (E) : $2x + 3 = 13$.

$$(E) : 2x + 3 = 13.$$

$$\text{Donc } (E) : 2x = 10 \dots$$

$$\text{Donc } (E) : x = \frac{10}{2} \dots$$

$$\text{Donc } (E) : x = 5 \dots$$

On enlève 3 aux 2 membres

On divise les deux membres par 2.

Vérification : $2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$ (ok)

Conclusion : Donc l'équation a une solution qui est 5.

Savoir-faire

Résoudre l'équation (E) : $2x - 10 = 5x + 2$.

$$(E) : 2x - 10 = 5x + 2.$$

$$\text{Donc } (E) : 2x - 10 - 5x = 2 \dots$$

$$\text{Donc } (E) : -3x - 10 = 2 \dots$$

$$\text{Donc } (E) : -3x = 2 + 10$$

$$\text{Donc } (E) : -3x = 12 \dots$$

$$\text{Donc } (E) : x = \frac{12}{-3}$$

$$\text{Donc } (E) : x = -4 \dots$$

On enlève $5x$ dans chaque membre

On ajoute 10 aux 2 membres

On divise les 2 membres par -3.

Vérification : $2 \times (-4) - 10 = 5 \times (-4) + 2 = -18$

Conclusion : Donc l'équation a une solution qui est -4.

c) Equations du deuxième degré.

☺ Equation du type (E) : $x^2 = a$

Résoudre l'équation

$$(E) : x^2 = 81$$

il y a deux nombres dont le carré est égal à 81, -9 et 9. L'équation (E) a deux solutions qui sont 9 et -9.

Résoudre l'équation

$$(E) : x^2 = 13$$

l'équation a deux solutions qui sont $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$.

Résoudre l'équation

$$(E) : x^2 = 0$$

l'équation a une seule solution qui est 0.

Résoudre l'équation

$$(E) : x^2 = -5$$

un carré de nombre réel est toujours positif. Cette équation n'a pas de solution.

☺ Cas général.

..... De façon générale, on ne sait pas résoudre une équation du second degré.....
 (c'est au programme de 1^{ère})..... Cependant, mis à part le cas pythagore ($x^2 = a$, p. 38)
 il y a un autre type d'équations du second degré qu'on peut résoudre, avec astuce
 et ingéniosité, le type produit nul.....

Phrase magique

..... Un produit est nul si et seulement si au moins 1 des facteurs est égale à 0.....

Traduction en langage mathématique

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Cette phrase est magique car elle transforme une équation du second degré en deux équations du premier degré.

Savoir-faire

Résoudre l'équation (E) : $(2x + 3)(4x - 8) = 0$

..... L'équation (E) est du type produit nul.....

..... Un produit est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.....

..... Donc $2x + 3 = 0$ ou $4x - 8 = 0$

$$2x = -3 \quad \text{ou} \quad 4x = 8$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2$$

..... Donc l'équation a deux solutions qui sont
 2 et $-\frac{3}{2}$

V. Résolution de problèmes.

Définition

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique avec une inconnue.
 Résoudre l'équation..... trouvée permet de répondre au problème posé.

Savoir-faire

Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

..... Soit x le nombre cherché.....

$$5x + 7 = 3$$

$$5x = -4$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

Savoir-faire

Mickaël a 18 ans et son père a 46 ans. Dans combien d'années le père de Mickaël aura-t-il le double de son âge ?

..... Soit x le nombre cherché.....

$$(E) : 46 + x = 2 \times (18 + x)$$

$$(E) \Leftrightarrow 46 + x = 36 + 2x$$

$$(E) \Leftrightarrow 10 = x$$

..... Donc dans 10 ans le père de Mickaël aura le double
 de son âge.....