

# Proportionnalité.

## I. Proportionnalité

### a) Situation de proportionnalité



**Exemple :** Dans une recette de gâteau, il faut 150g de farine pour 6 personnes. Donc pour 2 personnes, il faut 50g de farine, pour 8 personnes, il faut 200g de farine, pour 1 personne il faut 25g.  $150 : 6 = 25$  ;  $50 : 2 = 25$  ;  $200 : 8 = 25$  ;  $25 : 1 = 25$ .

Le quotient entre la quantité de farine et le nombre de personnes est toujours proportionnel. On dit que la quantité de farine et le nombre de personnes sont deux valeurs proportionnelles.

### Définition

Deux valeurs sont dites proportionnelles lorsque si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un nombre. Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Dans l'exemple, le coefficient de proportionnalité pour passer du nombre de personnes à la quantité de farine est 25.

- ☉ La longueur d'un côté d'un carré et son périmètre sont deux valeurs proportionnelles.
- ☉ L'âge et la taille sont deux valeurs non proportionnelles.
- ☉
- ☉

### b) Tableau de proportionnalité

Dans un tableau de nombres à deux lignes, on reconnaît une situation de proportionnalité lorsque les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par un même nombre, le coefficient.

$\times 25$	Nombre de personnes	6	2	8	1	10	20	18	$\div 25$
	Quantité de farine	150	50	200	25	250	500	450	

On passe de la première ligne à la deuxième en multipliant et de la deuxième à la première en divisant.

- ☉ Pour 10 personnes il faut 250 fois plus de farine que pour une personne, donc il faut 250g de farine.
- ☉ 500g de farine correspond à la quantité nécessaire pour 20 personnes.

**Remarque :**  $500 = 2 \times 250$  20g correspond à 20 personnes, donc 500 g correspond à  $2 \times 250 = 20$  personnes.

- ☉ 450g de farine correspond à la quantité nécessaire pour 18 personnes.

**Remarque :**  $450 = 200 + 250$  correspond à  $8 + 10 = 18$  personnes.

$$450 = 2 \times 200 + 50 \text{ correspond à } 2 \times 8 + 2 = 18 \text{ personnes.}$$

$$450 = 500 - 50 \text{ correspond à } 20 - 2 = 18 \text{ personnes.}$$

### Savoir-faire

- 2 m<sup>2</sup> de carrelage coûte 40 €. Le prix est proportionnel à la quantité achetée. Quel est le prix de 50 m<sup>2</sup>?
- Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Durée de location d'un jet ski	3	7,5
Prix du forfait en €	35	87,5

1. Si 2 mètres carrés de carrelage coûtent 40 €, alors 1 mètre carré coûte 20 €.

## c) Calculer une quatrième proportionnelle.

Propriété des produits en croix  $\times k$

Dans un tableau de proportionnalité 

a	c
b	d

 on a l'égalité :  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Démonstration : Le tableau est un tableau de proportionnalité donc il existe un nombre tel que  $c = k \cdot a$  et  $d = k \cdot b$ . Donc  $a \cdot d = a \cdot k \cdot b = k \cdot a \cdot b = b \cdot c$ .

Savoir-faire

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

5	8
3	4,8

$$5 \times 4,8 = 24 ; 3 \times 8 = 24$$

Donc c'est un tableau de proportionnalité.

Savoir-faire

2,5 kg de pommes coûtent 3 €. Combien coûtent 1,8 kg ?



$$\begin{array}{r} 2,5 \mid 3 \\ 1,8 \mid 2,16 \end{array}$$

$$2,5x = 1,8 \times 3$$

$$x = \frac{1,8 \times 3}{2,5}$$

$$\text{Donc } x = \frac{5,4}{2,5} = 2,16$$

## II. Echelles.

On utilise une échelle lorsque l'on veut reproduire un dessin en l'agrandissant, ou, au contraire en le réduisant. Toutes les dimensions de la reproduction sont alors proportionnelles à celles de l'original qui ont été multipliées par le coefficient de proportionnalité que l'on appelle, dans ce cas, l'échelle de la reproduction. Cette échelle est habituellement exprimée par une fraction dont l'un des termes est 1.

Une échelle de 1/1 000 (on dit 1 pour 1 000 ou 1 millième) signifie que les distances sur la reproduction sont 1 000 fois plus petites que les distances réelles. 1 centimètre sur la carte correspond à 1 000 cm dans la réalité.

Une échelle de 5/1 (5 pour 1) signifie que les distances sur la reproduction sont 5 fois plus grandes.

Savoir-faire

A quelle distance réelle correspond une longueur mesurée de 8,3 cm sur une carte à l'échelle  $\frac{1}{1000}$  ?



$$\text{Plan : } 1 \text{ cm } \rightarrow 8,3 \text{ cm} \quad 8,3 \times 1000 \text{ cm} = 83 \text{ m}$$

$$\text{Réalité : } 1000 \rightarrow 8300 \quad \text{La distance réelle est de } 83 \text{ m}$$

Savoir-faire

Un bateau de 25m correspond à une longueur de 10cm sur son modèle réduit. Quelle est l'échelle de réduction ?



$$25 \text{ m} = 2500 \text{ cm}; \quad \frac{10}{2500} = \frac{10 \times 1}{2500 \times 1} = \frac{1}{250} \quad \text{Donc, l'échelle est } \frac{1}{250}$$

tempe e d'altre prima p'chitta alla terra con d'ore  
 et d'altre nella 89 infirmita 25 de d'altre  
 ad 98 cui 4 meli e de ora dei mercato. tot de  
 1699 in 5 meli 1 de a 10000 a 20000 de  
 d'altre p'chitta d'altre 25 de 12 50000 de

Manuscrit italien de 1490 :

### III. Pourcentages.

Li Domanda quante fu comprato  
 libro di quanta d'altre con la 99  
 comendato 25 de la libro d'altre  
 d'altre guadagno 25 de

Manuscrit italien de 1684 :

#### a) Utiliser un pourcentage.

70% des enfants aiment les mathématiques cela veut dire que : sur 100 enfants, il y en a 70 qui aiment les mathématiques

Si 70% des enfants aiment les mathématiques : sur un groupe de 30 enfants, combien d'entre eux devraient aimer les maths ?

😊 Avec un tableau de proportionnalité :

70	81	proportion	$30 \times \frac{7}{100} = 2,1$
100	30	totalité	sur 30 enfants 2,1 aiment les maths

😊 En calculant directement :

$$\frac{70}{100} \times 30 = \frac{70 \times 30}{100} = 2,1$$

$$\text{car } 70\% = \frac{70}{100}$$

Savoir-faire

Un pantalon coûte 89€. Son prix est réduit de 20%. Calculer son nouveau prix.

Réduction : 20%  $\rightarrow 17,8$   $89 - 17,8 = 71,2$   
 Totalité : 100%  $\times 89$  le nouveau prix du pantalon est de 71,2 €



Savoir-faire

Le prix HT (Hors Taxe) d'une caméra numérique est de 436 €. Sachant que la TVA (Taxe à valeur ajoutée) est de 19,6% du prix HT, calculer le prix TTC (Toutes Taxes Comprises) de cette caméra. Arrondir au centième

Proportion : 19,6%  $\times 85,456$  le montant de la TVA est donc de 85,46 €  
 Totalité : 100%  $\times 436$  le prix TTC de la caméra est de  $436 + 85,46 = 521,46$  euros

#### b) Calculer un pourcentage.

Savoir-faire

Une automobile qui coûtait 8000€ est vendue 6800€. A quel pourcentage du prix initial correspond la remise ?



#### c) Utiliser un coefficient multiplicateur.

Propriétés

- 😊 Augmenter un nombre de N% revient à le multiplier par  $1 + \frac{N}{100}$
  - 😊 Diminuer un nombre de N% revient à le multiplier par  $1 - \frac{N}{100}$
- +30%  $\rightarrow \times 1,30$     -3%  $\rightarrow \times 0,97$   
 +50%  $\rightarrow \times 1,50$   
 +85%  $\rightarrow \times 1,85$   
 -10%  $\rightarrow \times 0,9$   
 -30%  $\rightarrow \times 0,7$

Savoir-faire

- Le prix d'un blouson qui coûtait 160 € est réduit de 35%. Calculer le nouveau prix du blouson.
- La facture d'électricité de Bertrand a subi une augmentation de 20% sur un an. Il a payé cette année 99 €. Calculer le prix qu'il avait payé l'année dernière.

1) 160 € Réduction 35%

$$\Rightarrow \text{Prix} = \left(1 - \frac{35}{100}\right) \times 160 = \frac{65}{100} \times 160$$

$$= 0,65 \times 160$$

$$= 104$$

2) Augmentation de 20%  $\Rightarrow 99$  €

$$99 = 1,2 \times \text{prix initial}$$

$$\text{prix initial} = \frac{99}{1,2} = 82,5$$

## IV. Représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

### Exemple :

Une voiture consomme 6 L de carburant pour parcourir 100 km. À partir de cette situation de proportionnalité, on peut construire le tableau de valeurs suivant :

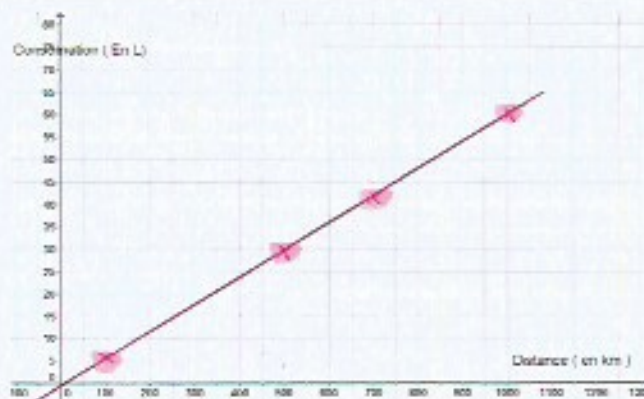


Distance parcourue (en km)	100	500	700	1000
Consommation (en L)	6	30	42	60

Plaçons maintenant les points sur un repère.

Les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.

Le graphique ci-dessous représente la consommation de carburant de cette voiture par rapport à la distance parcourue.



$$f(x) = mx$$

$$f(100) = m \times 100$$

$$m = \frac{6}{100}$$

### Propriété (admise)

Sur un graphique, on reconnaît une situation de proportionnalité lorsque cette situation est représentée par des points alignés sur une droite qui passe par l'origine.

### Exemple :

Nous allons représenter le périmètre d'un carré en fonction de la longueur du côté ainsi que son aire dans le même repère.

Longueur du côté en cm	1	2	3	4	5	6
Périmètre du carré en cm	4	8	12	16	20	24
Aire du carré en cm <sup>2</sup>	1	4	9	16	25	36

#### \* le périmètre du carré.

On place les points sur le graphique. Les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine. Donc le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté.

$$P(x) = 4x$$

#### \* l'aire du carré

On place les points sur le graphique. Les points ne sont pas alignés. Donc l'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à son côté.

En effet, l'expression de l'aire n'est pas une fonction linéaire, c'est une fonction du second degré car

$$A(x) = x^2$$

