

# Probabilités.



## I. Expérience aléatoire.

### Définition

Une expérience est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

Exemples : On lance une pièce et on observe la face obtenue, on lance un dé, on choisit une carte au hasard dans un paquet...

## II. Notion de probabilité.

### Expérience :

Lance 100 fois une pièce et calcule la fréquence associée au nombre de « Piles » obtenus ainsi qu'au nombre de « Face ».



	Pile	Face	Total
Effectifs	52	48	100
Fréquences	0,52	0,48	1

	Pile	Face	Total
Effectifs	481	519	1000
Fréquences	0,481	0,519	1

Regroupons les résultats de la classe dans un même tableau puis calculons les fréquences d'apparition de chaque face.

Utilisons un Tableau pour simuler un plus grand nombre de lancers.

	A	B	C	D
	Nombre de lancers	Pile ou Face	Nbre de Piles obtenus	Fréquence d'apparition de piles
1	1	1	1	1
2	2	0	1	0,5
3	3	0	1	0,333333333
4	4	1	2	0,5
5	5	1	3	0,6
6	6	0	3	0,5
7	7	1	4	0,571428571
8	8	1	5	0,625
9	9	1	6	0,666666667
1000	9997	1	4979	0,498009415
1000	10008	0	4979	0,497900096
1000	9999	0	4979	0,497900096
1000	10000	0	4979	0,4979
1000	10001	0	4979	0,497800015
1000	10002	1	4980	0,49790042

### TICE

On peut utiliser un tableur pour simuler un lancer de pièces. La fonction **Aléa. Entre Bornes (0, 1)** donne un nombre au hasard entre 0 et 1.  
=B3+C2

Plus on augmente le nombre de lancers et plus la fréquence d'obtention d'un pile se rapproche de 0,5. En théorie si je lance une infinité de fois ma pièce je devrais obtenir une fréquence égale à 0,5.

### Loi des grands nombres

On appelle **probabilité d'un événement** la fréquence théorique que cet événement se réalise si on répète une infinité de fois l'expérience.

Exemples : La probabilité d'obtenir pile est de 0,5.

## III. Probabilité d'un événement.

### Définition

Un **événement** est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

### Exemples

On lance un dé équilibré et on observe le nombre obtenu.

Il y a 6 issues possibles:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

"Obtenir 1" est un événement élémentaire.

"Obtenir un nombre pair" est un événement réalisé par 3 issues.

### Savoir-faire

Une urne contient 10 boules noires et 20 boules blanches. On prend une boule au hasard sans pouvoir les discerner, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

La probabilité d'obtenir une boule blanche est  $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ .

### Savoir-faire

Dans une classe de 25 élèves, 6 portent des lunettes et 10 mangent à la cantine. Si on choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte des lunettes ? qu'il mange à la cantine ?

La probabilité qu'il porte des lunettes est  $\frac{6}{25}$  et la probabilité qu'il mange à la cantine est  $\frac{10}{25}$ .

### Propriété

⊙ La probabilité  $P(E)$  d'un événement  $E$  est telle :  $0 \leq P(E) \leq 1$ .

⊙ La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

⊙ La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

\* Une probabilité est une fréquence (bien que théorique) donc comprise entre 0 et 1.

Si  $P(E) = 0$ ,  $E$  est dit événement impossible si  $P(E) = 1$ , on dit que  $E$  est un événement certain.

Exemple: la probabilité d'obtenir un nombre pair en lançant un dé est  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

### Définition

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on dit qu'il y a équiprobabilité.

On lance un dé équilibré. Chaque nombre a la même probabilité de sortir, chacune des 6 issues possibles a la même probabilité de se réaliser:  $\frac{1}{6}$ .

### Propriété

Dans une expérience aléatoire où les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement  $E$  est

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent } E}{\text{nombre d'issues totales}}$$

On choisit une lettre au hasard dans l'alphabet, quelle est la probabilité qu'elle appartienne au mot MATHÉMATIQUES ?  $\frac{9}{26}$ .

### Définition

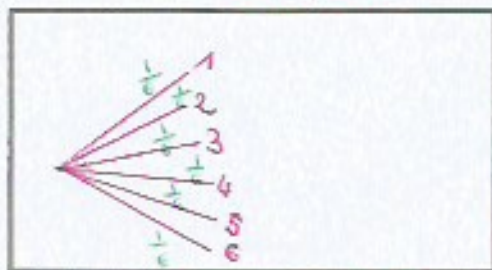
On appelle événement contraire d'un événement  $E$ , noté  $\bar{E}$ , l'événement qui se réalise lorsque  $E$  ne se réalise pas.

Soit  $E$  "obtenir un nombre  $\leq 2$ "  $P(E) = \frac{2}{6}$   $\bar{E}$  "obtenir un nombre  $> 2$ "  
 $P(\bar{E}) = \frac{4}{6}$   $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

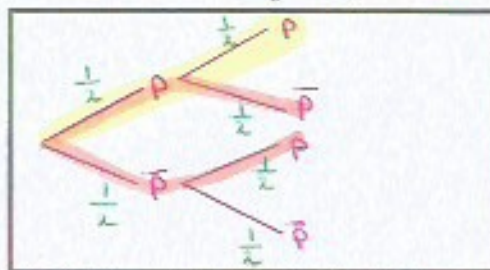
#### IV. Arbre de probabilité.

On peut représenter les issues possibles d'une expérience aléatoire par un arbre.

Exemples : ♦ Un lancer de dé équilibré :



♦ deux lancers de pièce équilibrés :



$$P(p=2) = \frac{1}{4}$$

$$P(p=1) = \frac{1}{2}$$

#### V. Extraits de sujets de brevet.

##### Brevet

Une société commercialise des composants électroniques qu'elle fabrique dans deux usines. Lors d'un contrôle de qualité, 500 composants sont prélevés dans chaque usine et sont examinés pour déterminer s'ils sont « bons » ou « défectueux ».

Résultats obtenus pour l'ensemble des 1 000 composants prélevés :

	Usine A	Usine B
Bons	473	462
Défectueux	27	38

- Si on prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine A, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
- Si on prélève un composant au hasard parmi ceux qui sont défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine A ?
- Le contrôle est jugé satisfaisant si le pourcentage de composants défectueux est inférieur à 7 % dans chaque usine. Ce contrôle est-il satisfaisant ?

1) La probabilité qu'il soit défectueux est de  $\frac{27}{500}$ .

2) La probabilité qu'il provienne de l'usine A est  $\frac{27}{65}$ .

3)  $\frac{500 \cdot 27}{100} \approx 5,4$   
 $5,4 < 7$

$\frac{500 \cdot 38}{100} \approx 7,6$   
 $7,6 > 7$

Le contrôle est satisfaisant pour l'usine A, mais pas pour la B.

##### Brevet

Un jeu télévisé propose à des candidats deux épreuves :

- Pour la première épreuve, le candidat est face à 5 portes : une seule porte donne accès à la salle du trésor alors que les 4 autres s'ouvrent sur la salle de consolation.
- Pour la deuxième épreuve, le candidat se retrouve dans une salle face à 8 enveloppes.

Dans la salle du trésor : 1 enveloppe contient 1 000 €, 5 enveloppes contiennent 200 €. Les autres contiennent 100 €.

Dans la salle de consolation : 5 enveloppes contiennent 100 € et les autres sont vides.

Il doit choisir une seule enveloppe et découvrir alors le montant qu'il a gagné.

- Quelle est la probabilité que le candidat accède à la salle du trésor ?
- Un candidat se retrouve dans la salle du trésor.
  - Représenter par un schéma la situation.
  - Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins 200 € ?
- Un autre candidat se retrouve dans la salle de consolation. Quelle est la probabilité qu'il ne gagne rien ?

1) La probabilité est de  $\frac{1}{5}$

2) a-

b- La probabilité est  $\frac{5}{8}$

3) La probabilité est  $\frac{3}{8}$