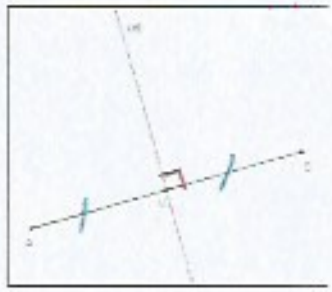
Les transformations du plan.

I. La symétrie axiale.

a) La médiatrice d'un segment.



Définition

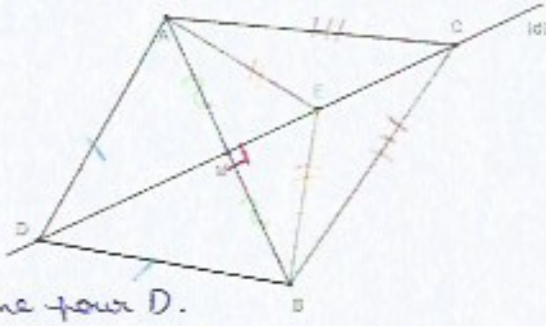
La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire ce segment [AB] qui passe par son milieu (H).

Exemple : (d) est la médiatrice du segment [AB]

Propriété (démontrée en 4^e)

☺ Tout point appartenant à la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités du segment.

☺ Tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment.



Exemple : E appartient à (d) donc EA = EB
Si CA = CB alors C appartient à (d) de même pour D.

Application : On peut construire la médiatrice d'un segment avec un compas. On peut donc construire un ~~triangle isocèle~~ angle droit avec un compas !!!!

b) La symétrie axiale, définition.

Définition

L'image d'un point A par la symétrie axiale d'axe (d) est le point A' tel que :

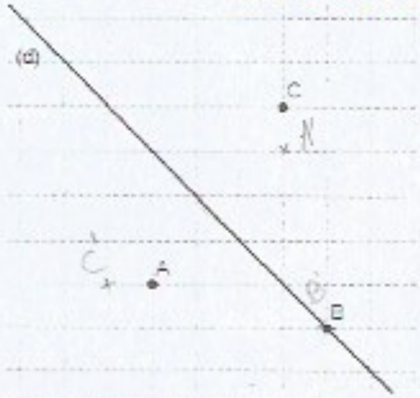
- Si A appartient à (d) alors A' = A
- Si A n'appartient pas à (d) alors alors (d) est la médiatrice de [AA']

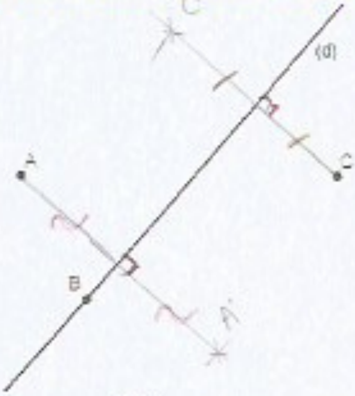
Le point A' est l'image du point A par rapport à (d) car (d) est la médiatrice de [AA']. On dit aussi que A' est le symétrique de A par rapport à (d).

Le symétrique du point B est B.

Car il appartient à (d), l'axe de symétrie

c) Construire l'image d'un point par une a symétrie axiale.



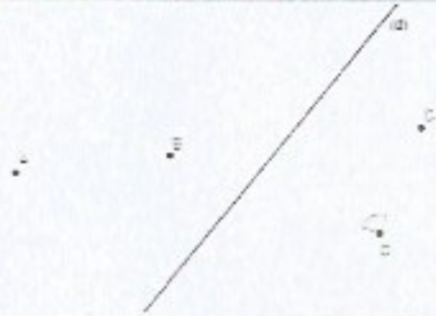


Pour tracer le symétrique d'un point A, on trace la perpendiculaire à (d) passant par A.
Puis à l'aide du compas, on place A' sur cette droite à la même distance de (d) que le point A.
(d) est la médiatrice de [AA']

d) Propriétés de la symétrie axiale.

Propriété (admise)

La symétrie axiale conserve les longueurs... (la distance entre deux points et la même que celle entre leurs images) et elle conserve l'alignement. (les images de trois points alignés sont alignés........) et elle conserve les angles.



Exemple : $AB = A'B'$

A, B et C sont alignés, ainsi que A', B' et C'

$\widehat{CDB} = \widehat{C'D'B'}$

Conséquences

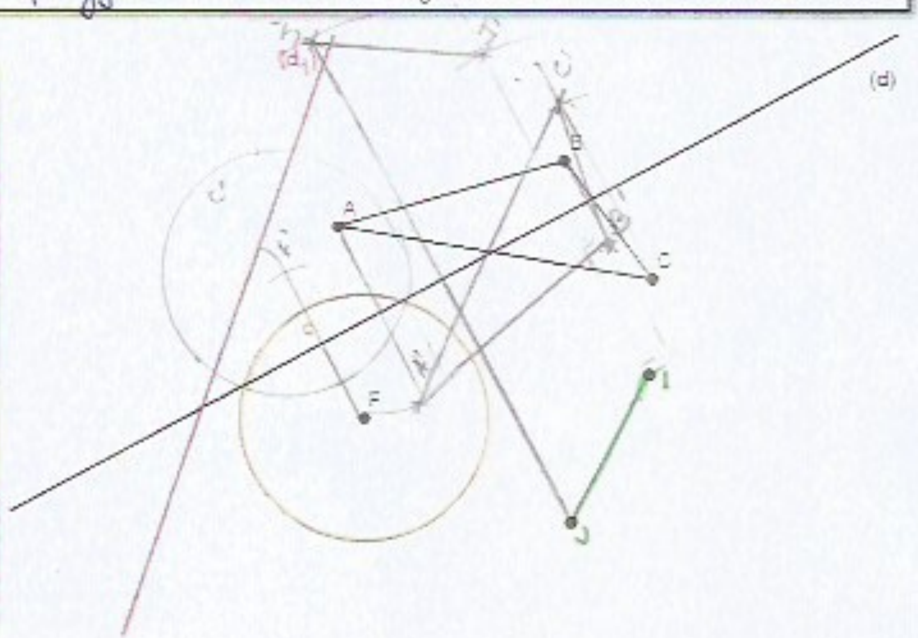
Par une symétrie axiale l'image d'un segment est un segment..... de même longueur, l'image d'une droite est une droite... l'image d'un polygone est un polygone de même nature, l'image d'un cercle et un cercle..............

Le symétrique de la droite (d1) par rapport à la droite (d) est la droite (d1')

Le symétrique du segment [IJ] par rapport à la droite (d) est le segment [I'J']

Le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (d) est le triangle A'B'C'

Le symétrique du cercle C de centre F par rapport à la droite (d) est le cercle C' de centre F'.

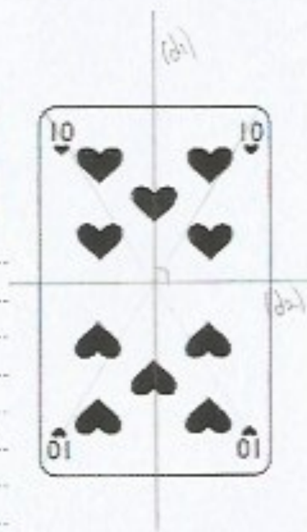


e) Axe de symétrie d'une figure.

Définition

On dit qu'une figure admet un axe de symétrie (d) si elle reste identique par la symétrie axiale.

La symétrie de cette carte par rapport à (d1) ou à (d2) est elle-même.



II. La symétrie centrale.

a) Le milieu d'un segment.

Définition

Le milieu d'un segment est le point qui appartient à ce segment et qui est équidistant de ses extrémités.

Exemple : N appartient au [AB], mais n'est pas équidistant d'A et B ce n'est ~~ke~~ milieu. P est equidistant d'A et B mais n'est pas le milieu. M appartient a [AB] et est equidistant de [AB] : c'est le milieu

b) La symétrie centrale, définition.

Définition

L'image d'un point A par la symétrie centrale de centre I est le point A' tel que :

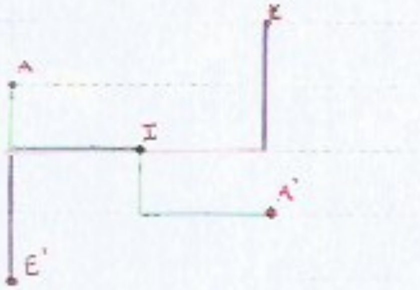
- Si A est confondu avec I alors A' = A (= I)
- Si A n'est pas confondu avec I alors I est le milieu de [AA']

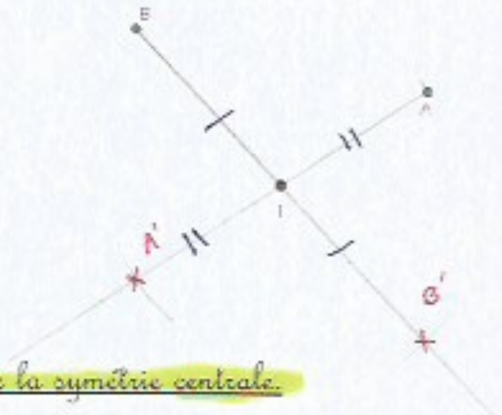
Le point A' est l'image du point A par rapport à I car I est le milieu de [AA']. On dit aussi que A' est le symetrique de A par rapport à I.

Le symétrique du point I est I.

Car il se superpose

c) Construire l'image d'un point par une a symétrie centrale.





On trace [BI) puis avec le compas, on place B', tel que BI = IB'

d) Propriétés de la symétrie centrale.

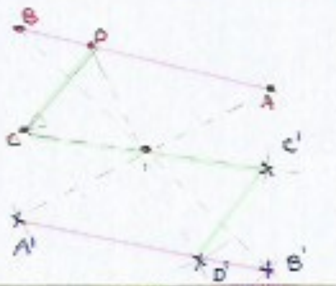
~~Propriété~~ (admise)

La symétrie ~~axiale~~ centrale conserve les longueurs (la distance entre deux points et la même que celle entre leurs images) et elle conserve l'alignement. (les images de trois points alignés sont alignés) et elle conserve les angles.

Exemple : A', B' et D' sont alignés, comme A, B et D

AB = A'B' = 3,45 cm

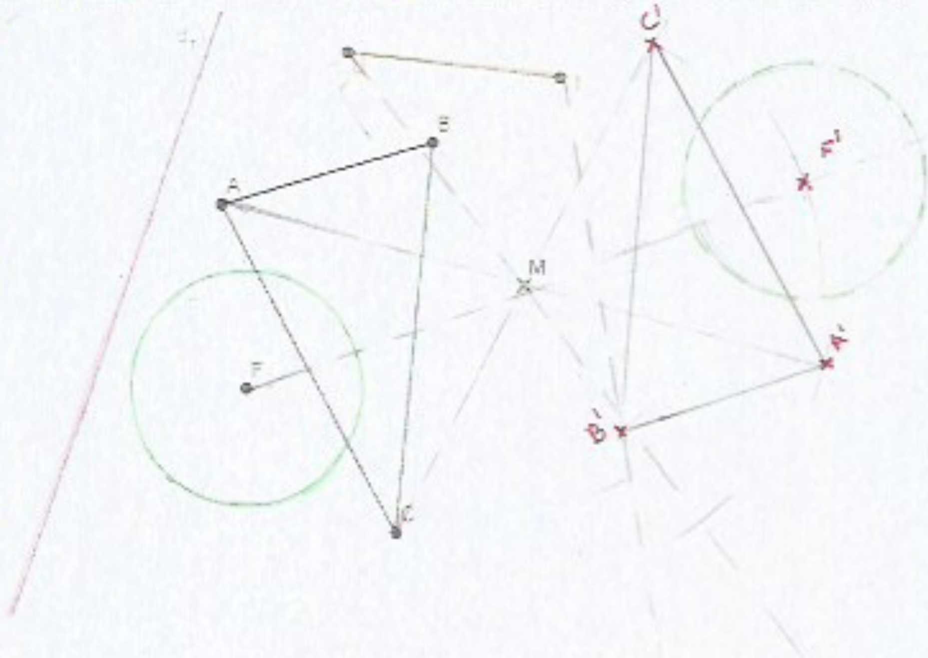
$\widehat{DCI} = \widehat{D'C'I} = 60°$



Conséquences

Par une symétrie ~~axiale~~ centrale l'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'une droite est une droite parallèle, l'image d'un polygone est un polygone de même nature, l'image d'un cercle est un cercle

Pour tracer le symétrique d'un triangle: on trace le symétrique des points (extrémités et sommets)
Pour tracer le symétrique d'une droite on peut placer deux points sur la droite.
Pour tracer le symétrique d'un cercle: on trace le symétrique du centre F par rapport à M. Puis on trace un cercle de centre F', de même rayon



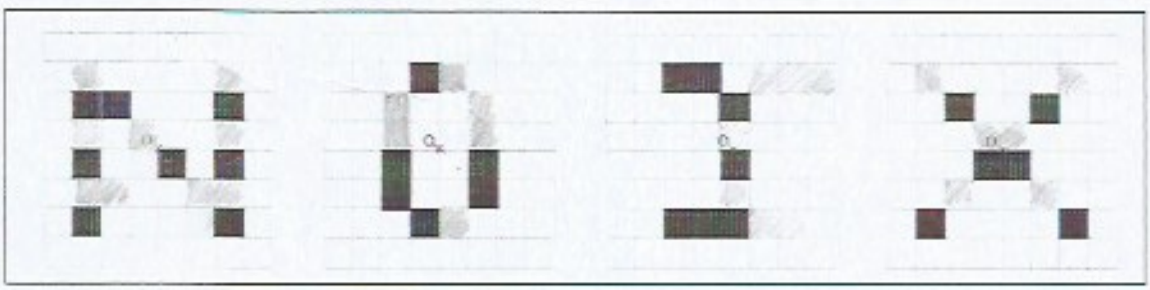
c) Centre de symétrie d'une figure.

Définition

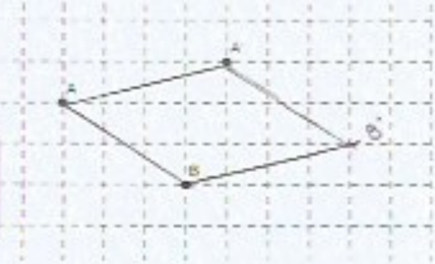
On dit qu'une figure admet un Centre de symétrie I si elle reste identique par la symétrie de centre I.

La symétrique de cette dame de coeur par rapport à son centre de symetrique est elle même

Exemple : Complète pour que les figures suivantes aient un centre de symétrie......



III. La translation.



a) La translation, définition.

Définition

L'image d'un point B par la translation qui transforme A en A' est le point B' tel que : AA'B'B est un parallélogramme

Exemple : ici AA'BB' est un parallélogramme

Remarques : ⚠ la translation qui transforme A en A' est différente de celle qui transforme A' en A.

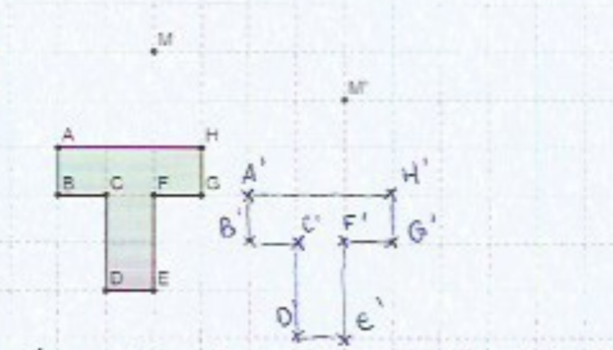
b) Propriétés de la translation.

Propriété (admise)

La translation conserve les longueurs, le parallélisme et les angles

Conséquences

Par une translation l'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'une droite est une droite parallèle l'image d'un polygone est un polygone de même nature, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.



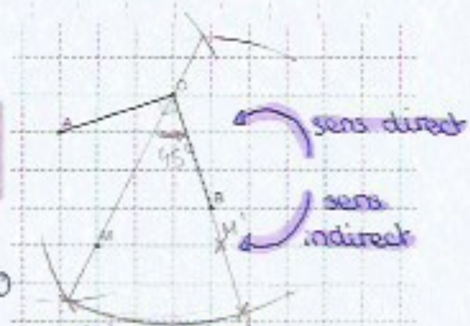
Construire l'image de T par la translation qui transforme M en M'.

IV. La rotation

a) La rotation, définition.

Définition

L'image d'un point M par la rotation de centre O et d'angle α est le point M' tel que : OM' = OM et mes ($\widehat{MOM'}$) = α



Exemple : B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens direct.

Construire M', l'image de M par la rotation de centre O d'angle 45° dans le sens idirect.

Remarques : Une rotation d'angle 180° est une symétrie centrale.

b) Propriétés de la rotation.

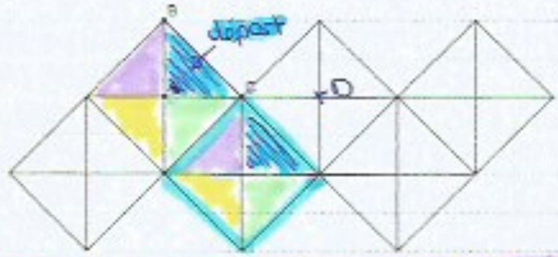
Propriété (admise)

La rotation conserve l'alignement, les distances et les angles

Conséquences

Par une rotation l'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'une droite est une droite, l'image d'un polygone est un polygone de même nature, l'image d'un cercle est un un cercle de même rayon

V. Le Construire une frise



Savoir-faire

ABC est un triangle rectangle isocèle en A. Expliquer comment réaliser cette frise avec des translations et rotations.

Construction d'un carré : on obtient le violet par une rotation de centre A et d'angle 90° (sens direct
rotation de centre A, angle 90° sens indirect. Rotation de centre A, angle 180°.
Carré 2 : translation par transforme B en C. Carré 3 : translation qui transforme A en D.

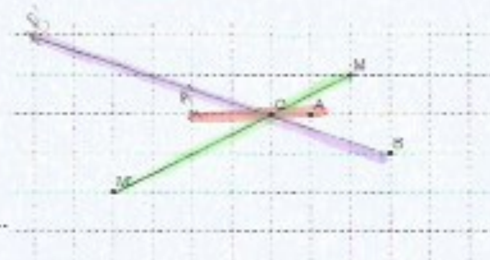
VI. L'homothétie

a) L'homothétie, définition

Définition

L'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k ($k > 0$) est le point M' tel que : M' ∈ (OM) et OM' = k(OM)

Remarques : Construire l'image des points A, B et M par l'homothétie de centre O et de rapport k = 3.



Définition

L'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k ($k < 0$) est le point M' tel que : M' ∈ (OM) mais M' ∉ [OM) et OM' = (−k)×OM

Remarques : k = −2.

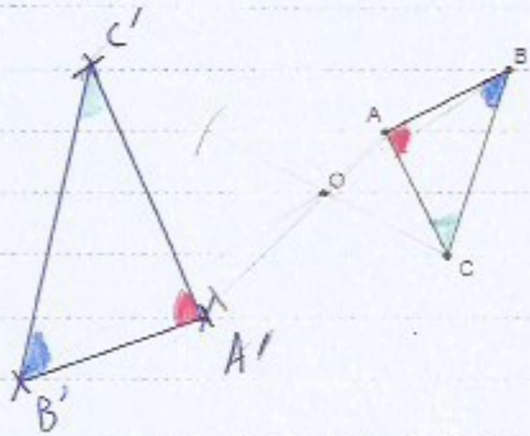
b) Propriétés de l'homothétie

Propriété (admise)

L'homothétie ne conserve pas les distances
☺ si −1 < k < 1 c'est une réduction ☺ si k < −1 ou k > 1 c'est un agrandissement.

Propriété (admise)

L'homothétie conserve l'alignement et les angles.



par une homothétie de centre O et de rapport −2
le triangle a pour image un triangle agrandi avec un coefficient égal à 2.

OA' = 2OA
OB' = 2OB
OC' = 2OC

comme le rapport est négatif
A ∈ [AO).