Le Petit devoir du vendredi Le 27 Septembre 2019	/10

Exercice I. ROC (2 points)

1. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

Soit un réel a > 0 ∀ ∈ N, $(1 + a)^{n} \geq 1 + na$.

2. Démontrer que pour tout nombre q > 1, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exercice II. Suites arithmético-géométrique. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$

Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique, en déduire la limite de (u_n).

Exercice III. Récurrence et convergence monotone (2.5 points)

Soit (u_n) croissante définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4, en déduire qu'elle converge.

Exercice IV. (2.5 points)

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

1) Montrer (u_n) est croissante.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \geq n^2$
3) En déduire la limite de (u_n).

Exercice V. (1 points)

Calcule les limites suivantes, en justifiant ta réponse :

$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n^2-1}$ $\quad b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2}{n^2+4}$ $\quad c)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\quad d)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$