$\diagup$ 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-2; 0]$

c) Déterminer un encadrement à 10^{-3} à l'aide de votre calculatrice.

d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

2) **Étude de la fontion f**

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \dfrac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2}$

c) À l'aide d'un tableau de signe donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) En écrivant $f(x) = \dfrac{x(x^3 - 4)}{x^3 + x}$, montrer alors que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$

e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

f) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x$?

"Those who can imagine anything, can create the impossible."
— Alan Turing