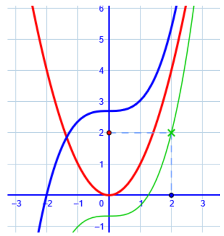
Primitives, intégrales.

☺ Primitives.

On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F'=f$.

Prop : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Prop : ♦ $F+G$ est une primitive de $f+g$, ♦ kF est une primitive de kf avec $k\in\mathbb{R}$.



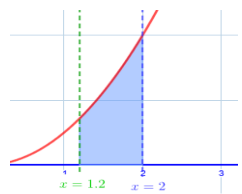
Primitive particulière : Soit F une primitive de f.

G est une primitive de $f \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ / $G = F + k$.

Soit deux nombres fixés x_0 et y_0,

Il existe une unique primitive de f telle que $F(x_0)=y_0$.

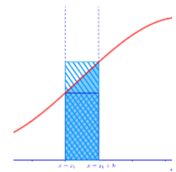
☺ Intégrales.



Def : Si f est une fonction positive et continue sur [a,b].
L'aire (en unité d'aire) du domaine délimité par : Cf, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. est notée : $\int_a^b f(x)dx$.

La fonction Aire :

$$\boxed{donc\ \lim_{h\to 0}\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}=f(x_0).}$$



Prop : $A : x \to \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f

Intégrale, cas général.

Si F est une primitive de f, alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Attention : si f n'est pas positive, ce n'est pas le calcul d'aire : $\int_{-1}^{1} x^3 dx$.

Prop : $\int_a^a f(x)dx = 0$ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (Relation de Chasles)

$\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$

Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Valeur moyenne : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$