Primitives d'une fonction continue.

I. Définition et propriétés.

Introduction :

On considère les fonctions suivantes définies sur IR : $f : x \to 2x + 3$. et $F : x \to x^2 + 3x - 1$.

On remarque que l'expression de la dérivée de …… est égale à l'expression de ……

C'est-à-dire que ……………………………

On dit dans ce cas que F est une ………………………… de f sur IR.

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I. On appelle <u>primitive</u> de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que ……………………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir trouver une primitive d'une fonction continue :*

Trouve une primitive de f telle que $f(x) = x + 3$ et de g telle que $g(x) = x^2 + 3x - 5$.

……

……

……

☑ *Savoir-faire : Savoir Montrer qu'une fonction donnée est une primitive :*

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1-(x+1)e^{-x}$. Prouve que la fonction F définie sur IR par $F(x) = x + (x+2)e^{-x}$ est une primitive de f sur IR.

……

……

……

……

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : *Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.*

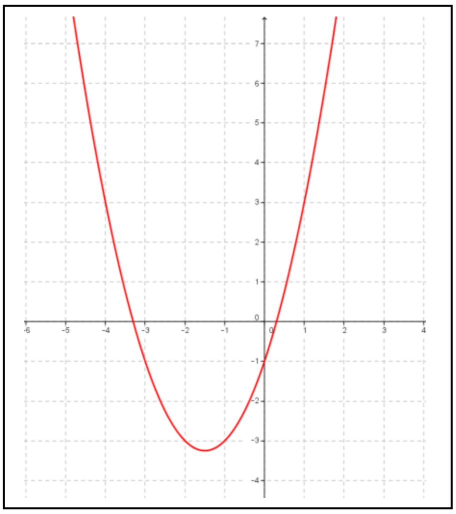
II. Primitive prenant une valeur donnée.

Propriété (admise)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I alors pour tout nombre réel k, la fonction $x \to F(x) + k$ est une primitive de f sur I.

Exemple :

Soit $f : x \to 2x + 3$. On a vu $F : x \to x^2 + 3x - 1$. Est une primitive de f.



………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Propriété (admise)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On donne deux réels x_0 et y_0 avec $x_0 \in [a\ ;\ b]$.
Alors il existe une unique primitive G de f sur $[a\ ;\ b]$ telle que $G(x_0) = y_0$.

☑Savoir-faire : Savoir trouver la primitive d'une fonction continue prenant une valeur donnée :

Soit f définie par $f(x) = 2x + 3$. Détermine la primitive G de f est telle que $G(2) = 1$.

....
....
....
....
....

III. Primitives des fonctions usuelles.

fonction f d'expression	*Une primitive*
$f(x) = k\ \ (k \in \mathbb{R})$	
$f(x) = x^n$ (*n entier positif*)	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = x^3$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	

IV. Linéarité des primitives.

Propriété (admise)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a\ ;\ b]$ alors :

☺ $F + G$ est une primitive de $f+g$.

☺ kF est une primitive de kf, avec k réel.

☑Savoir-faire : Savoir rechercher des primitives :

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 5x^4$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ c) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$ e) $f(x) = x^3 - 2x$ f) $f(x) = xe^{x^2}$

....
....
....
....
....
....