

Probabilités.

I. Vocabulaire (rappels).

Définition

Une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.



On considère l'expérience aléatoire suivante : « On lance une pièce 100 fois et on calcule la fréquence d'obtention de Pile ». $f = \dots\dots\dots$. On calcule la fréquence d'obtention de Pile pour tous les lancers de la classe. $f = \dots\dots\dots$

Définition

Les fréquences obtenues d'un événement **E** se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (Loi des grands nombres). Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement **E**.

Dans l'expérience aléatoire ci-dessus, on appelle **E** l'événement « obtenir Pile ». On a alors $p(\mathbf{E}) = \dots\dots\dots$

Définition

- ◆ Un évènement est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- ◆ Les évènements élémentaires sont les évènements réduits à une unique issue de l'expérience.

.....
.....
.....



Définition

- ◆ La probabilité $p(\mathbf{E})$ d'un événement **E** est telle : $0 \leq p(\mathbf{E}) \leq 1$.
- ◆ La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1.
- ◆ La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

.....
.....
.....
.....

Définition

- ◆ On appelle événement contraire d'un **E**, l'événement qui se réalise lorsque **E** ne se réalise pas.
- ◆ On le note $\bar{\mathbf{E}}$ et on a $p(\bar{\mathbf{E}}) = 1 - p(\mathbf{E})$.

.....
.....
.....

Définition

- ◆ L'évènement "A et B", noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux évènements A et B sont simultanément réalisés.
 - ◆ L'évènement "A ou B", noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux évènements est réalisé.
- On a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$



.....
.....
.....

3. Espérance d'une loi de probabilité :

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant un nombre fini de valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .
L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \dots + x_n \times p(X = x_n).$$

Savoir faire : Savoir calculer l'espérance d'une loi de probabilité :

Déterminer l'espérance du jeu précédent.

Remarque : L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétition.

Exercice bilan : Une loterie est constituée de 1000 billets vendus 1 € chacun. Parmi les billets vendus, un permet de gagner 400 €, deux permettent de gagner 100 € et dix rapportent 10 €.

1. Un joueur achète un billet. On appelle G la variable aléatoire qui à un billet associe le gain du joueur.

- a. Définir la loi de probabilité de G .
- b. Calculer $E(G)$.
- c. Le jeu rapporte-t-il à l'organisateur de la loterie ou aux joueurs ?

2. Pour être sûre de gagner, une personne achète tous les billets.

- a. Quelle est le bilan financier de son opération ?
- b. Quelle est la perte moyenne par billet acheté ?