Probabilités

☺ Loi binomiale. *p probabilité d'un succès*

Si X est la variable aléatoire associée au nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes on dit que X suit $B(n\,,\,p)$.

$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^{k} \times (1-p)^{n-k}$. $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions dans l'arbre.

$E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

☺ Probabilités conditionnelles.

$p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ loi de probabilités totales : $p(A) = p(A\cap B) + p(A \cap \bar{B})$

Def: A et B sont indépendants $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$. $p_B(A) = p(A)$.

ROC : Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

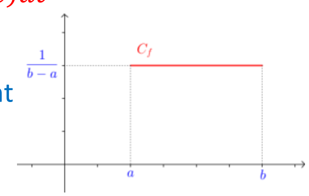
☺ Densité de probabilités.

Def: On appelle fonction de densité toute fonction f définie, **continue** et **positive** sur un intervalle I telle que **l'intégrale de f sur I soit égale à 1.**

Si X est une variable aléatoire continue ayant comme fonction de densité f alors :

$$p(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad E(X) = \int_a^b tf(t)dt$$

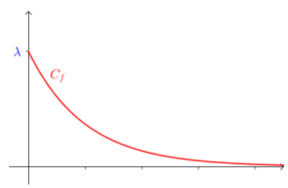
☺ Loi uniforme.



La loi uniforme sur $[a\,;b]$, notée $U([a\,;b])$, est la loi ayant pour densité une fonction constante : $f(t) = \frac{1}{b-a}$

$p(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$ et $E(X) = \frac{a+b}{2}$

☺ Loi exponentielle.

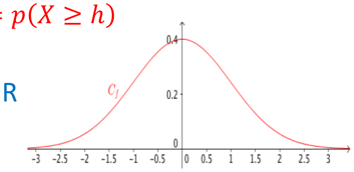


La loi exponentielle de paramètre λ est la loi ayant pour densité sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

$p(X \le a) = 1 - e^{-\lambda a}$ $p(X \ge a) = e^{-\lambda a}$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Durée de vie sans vieillissement : $p_{(X\ge t)}(x \ge t+h) = p(X \ge h)$

☺ Loi normale N(0 ; 1).



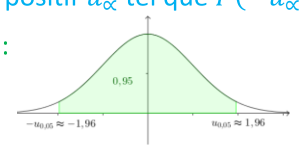
Loi normale centrée réduite $N(0;1)$ de densité sur R

$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$ $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$

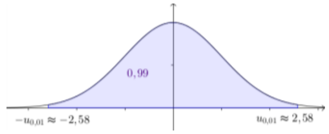
ROC : X est une variable aléatoire qui suit $N(\,0\,;1\,)$. Pour tout $\propto\, \in\,]0\,;1[$, il existe un unique réel positif $u_\propto$ tel que $P(-u_\propto \le X \le u_\propto) = 1 - \propto$.

Cas particulier :

$u_{0,05} \approx 1{,}96$



$u_{0,01} \approx 2{,}58$

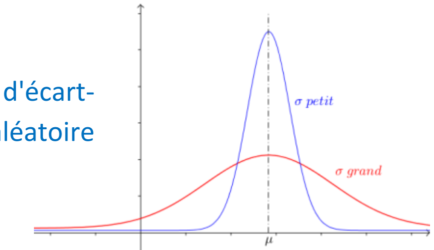


X suit $N(0\,;1)$. Casio OPTN STAT, DIST, NORM

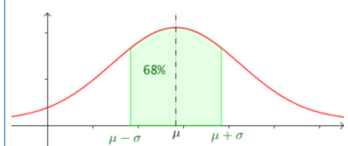
☺ $P(X \le 1{,}96)$: NormCD(-10^{99}, 1.96 , 1 , 0)

☺ Trouver t / $P(X \le t) = 0{,}9$: InvNormCD(0.9 , 1 , 0)

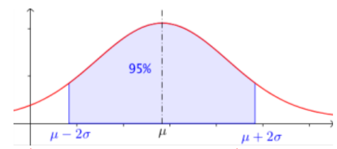
☺ Lois normales.



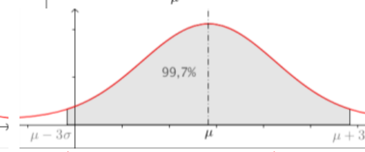
Dire que X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, notée $N(\,\mu\,;\,\sigma^2\,)$ signifie que la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit $N(\,0\,;1\,)$.



$p(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 0{,}683$

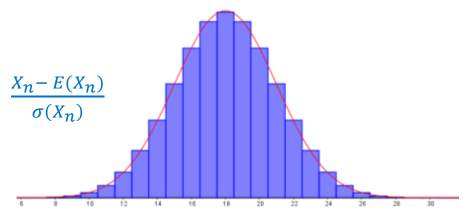


$p(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 0{,}954$



$p(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

☺ Théorème de Moivre-Laplace.



Soit X_n une variable aléatoire qui suit $B(n\,;p)$.

Pour n grand, on peut considérer que $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ suit $N(\,0\,,1)$.

☺ Fluctuation et estimation. $n \ge 30$, $np \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$.

Intervalle de fluctuation : On suppose que la proportion p du caractère étudié est connue. f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n.

Dans 95% des cas f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil 0,95 :

$$I_f = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Prise de décision : sur l'échantillon observé :

Si $f \in I_f$, alors on accepte l'hypothèse faite sur la proportion p.

Si $f \notin I_f$, alors on rejette l'hypothèse faite sur la proportion p.

Intervalle de confiance : On ne connait pas la proportion p du caractère étudié. f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n.

Dans 95% des cas p appartient à l'intervalle de confiance au niveau 0,95 :

$I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (longueur de l'intervalle $\frac{2}{\sqrt{n}}$)