# Probabilités conditionnelles.

***Pierre-Simon de Laplace* (1749 ; 1827)** est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français, il écrit « LaThéorie analytique des probabilités ».

Dans tout le chapitre, $\Omega$ désigne l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

## I. Probabilités conditionnelles.

Définition : Soit $A$ et $B$ deux événements avec $p(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$, la probabilité que l'événement $B$ se réalise sachant que l'événement $A$ est réalisé.

Elle est notée $p_A(B)$ et est définie par : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

*Exemple 1 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.*
*Soit A l'événement "Le résultat est un pique". Soit B l'événement "Le résultat est un roi".*
*Détermine la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.*

$p(A) = \frac{1}{4}$ , $p(B) = \frac{1}{8}$ , $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$ , $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

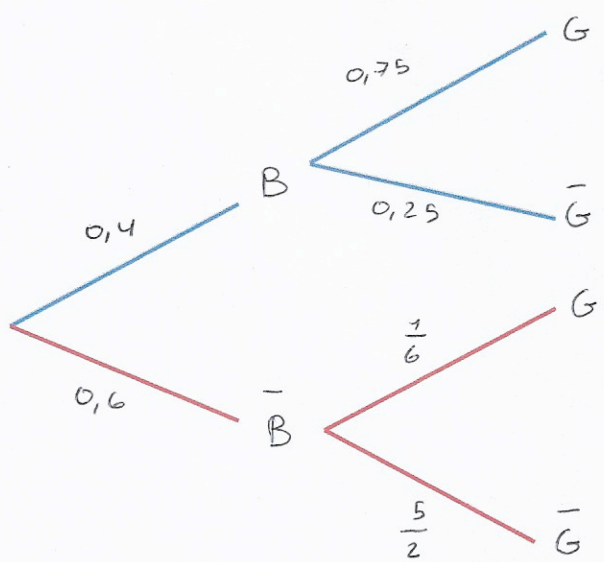
*Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :* $p(A) = \frac{1}{8}$

Propriété : Soit $A$ et $B$ deux événements avec $p(A) \neq 0$.

- $0 \leq p_A(B) \leq 1$
- $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

## II. Arbre pondéré.

*Exemple :* Une urne contient 100 tickets, dont 40 tickets bleus et 60 tickets rouges. Sur chaque ticket, il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu". Il est marqué Gagné sur 30 tickets bleus et sur 10 tickets rouges. On tire au hasard un ticket dans l'urne.
Soit $B$ l'événement "On tire un ticket bleu". Soit $G$ l'événement "On tire un ticket marqué Gagné"
On peut représenter l'expérience aléatoire par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :




- $p(B) = \frac{40}{100} = 0,4$ • $p(\bar{B}) = 0,6$
- $p_B(G) = \frac{30}{40} = 0,75$ • $p_B(\bar{G}) = 0,25$
- $p(B \cap G) = p(B) \times p_B(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$
- $p_{\bar{B}}(G) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ • $p_{\bar{B}}(\bar{G}) = \frac{5}{6}$
- $p(\bar{B} \cap \bar{G}) = p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(\bar{G}) = 0,6 \times \frac{5}{6} = 0,5$
- $p(G) = p(B \cap G) + p(\bar{B} \cap G)$
  $= 0,4 \times 0,75 + 0,6 \times \frac{1}{6} = 0,4$
- $p_G(B) = \frac{p(G \cap B)}{p(G)} = \frac{0,4 \times 0,75}{0,4} = 0,75$

**Propriété** : Dans un arbre pondéré :

◆ La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

◆ La probabilité de l'évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités des branches composant ce chemin.

• $p(B) + p(\bar{B}) = 1$ • $p(B \cap G) = p(B) \times p_B(G)$

• $p_B(G) + p_B(\bar{G}) = 1$ • $p(B \cap \bar{G}) = p(B) \times p_B(\bar{G})$

• $p_{\bar{B}}(G) + p_{\bar{B}}(\bar{G}) = 1$

## ☺ Formule des probabilités totales.

**Définition** : Soit $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ , $n$ évènements de probabilité non nulle, deux à deux disjoints et tels que leur réunion forment l'univers $\Omega$ , alors on dit qu'ils constitue une **partition** de l'univers $\Omega$.

*Exemple :* Soit $A$ un évènement de probabilité non nulle, et $\bar{A}$ son évènement contraire.

• $A \cap \bar{A} = \emptyset$ • $A \cup \bar{A} = \Omega$

Donc $A$ et $\bar{A}$ constituent une partition de l'univers $\Omega$

**Propriété** : Formule des probabilités totales.

Soit $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ , une partition de l'univers $\Omega$ et soit $B$ un évènement. Alors :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots\ldots + p(A_n \cap B)$$

$B$ et $\bar{B}$ constituent une partition de l'univers

Donc $p(G) = p(B \cap G) + p(\bar{B} \cap G)$

### ☑ *Savoir-faire : Savoir calculer des probabilités conditionnelles :*

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

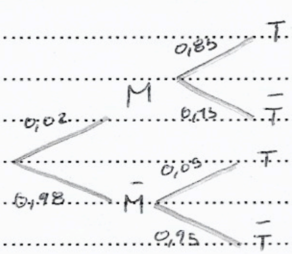
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note M et *T* les événements « Être porteur de la maladie » et« Avoir un test positif ».

Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?




$M$ et $\bar{M}$ constituent une partition de l'univers.

Donc d'après la loi des probabilités totales :

$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T)$

$= p(M) \times p_M(T) + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T)$

$= 0{,}02 \times 0{,}85 + 0{,}98 \times 0{,}05$

Donc $p(T) = 0{,}066$

## III. Indépendance de deux événements.

### ☺ Évènements indépendants.

**Définition :**
On dit que deux évènements $A$ et $B$ sont **indépendants** lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

*Exemple 1 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit R l'événement "On tire un roi". Soit T l'événement "On tire un trèfle". R et T sont-ils indépendant ?*

$p(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ , $p(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ , $p(T \cap R) = \frac{1}{32}$ , $p(R) \times p(T) = \frac{1}{2}$

Donc $p(T \cap R) = p(R) \times p(T)$ , Donc R et T sont indépendants.

*Exemple 2 : On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.*

$p(R) = \frac{4}{34}$ , $p(T) = \frac{8}{34}$ , $p(R \cap T) = \frac{1}{34}$ , $p(R) \times p(T) = \frac{4}{34} \times \frac{8}{34} = \frac{32}{34 \times 34} \neq \frac{1}{34}$

Donc R et T ne sont pas indépendants.

**Propriété :**
*$A$ et $B$ sont **indépendants**, si et seulement si $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$.*

### ☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser l'indépendance de deux événements :*

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,01. On choisit au hasard un individu de cette population. Soit M l'événement "L'individu a la maladie m". Soit N l'événement "L'individu a la maladie n". On suppose que les événements M et N sont indépendants. Calculer la probabilité de l'événement E "L'individu a au moins une des deux maladies".

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(M \cup N) = p(M) + p(N) - p(M \cap N)$

$p(M \cup N) = 0{,}005 + 0{,}01 - p(M) \times p(N)$

**Propriété :**
*Si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $A$ et $\bar{\bar{B}}$ sont indépendants.*

- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ 
- $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)$

$p(A) \times p(B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)$ , $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A) \times (1 - p(B))$
$= p(A) \times p(\bar{B})$

*Exemple :* Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a 42% de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63% sur l'autoroute A7. Soit A l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6." Soit B l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7." On suppose que les événements A et B sont indépendants. Le conducteur prend la A6 puis la A7, quelle est la probabilité qu'il ne rencontre aucun bouchon ?

A et B sont independants donc $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont independants

donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$ , Donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - 0{,}63) \times (1 - 0{,}42)$
$= 0{,}37 \times 0{,}58 = 0{,}2146$

## ☺ Succession de deux épreuves indépendantes.

**Définition** : Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'**une succession de deux épreuves indépendantes**.

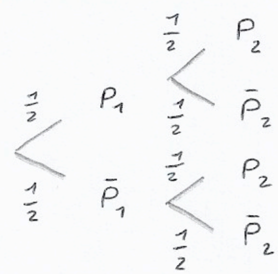
*Exemple : On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat.*

Chaque expérience (lancée de dé) est independante du résultat de la précédente.

**Définition** : Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :
- Elles ont les mêmes issues.
- Chaque issue possède la même probabilité dans chaque expérience.

*Exemple : On lance une pièce équilibrée deux fois. On note la face obtenue à chaque lancer.*
*Soit P, l'évènement « on obtient Pile »*

Chaque lancé de pièce est identique et independant. La probabilité d'avoir exactement 2 piles sur les 2 lancés : $p(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. La probabilité d'obtenir 0 piles est $p(\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, probabilité d'obtenir exactement 1 pile est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

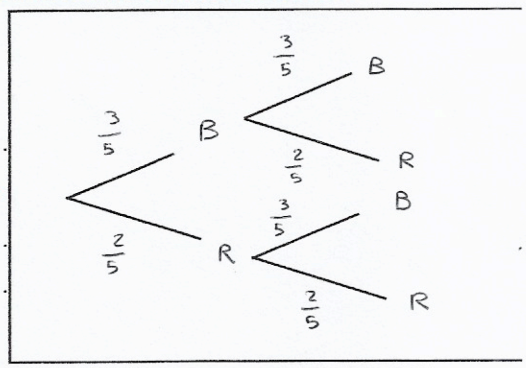



**Propriété** : On considère une expérience aléatoire à deux issues $A$ et $B$. Si on répète l'expérience deux fois de suite :
- la probabilité d'obtenir l'issue $A$ suivie de l'issue $B$ est égale à $p(A) \times p(B)$.
- la probabilité d'obtenir l'issue $B$ suivie de l'issue $A$ est égale à $p(B) \times p(A)$.
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue $A$ est égale à $p(A)^2$.
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue $B$ est égale à $p(B)^2$.

### ☑ *Savoir-faire : Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes dans un arbre :*

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite. On note B l'événement « On tire une boule blanche ». Et R l'événement « On tire une boule rouge ».

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.




2) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

$p(B)^2 = \frac{3}{5}^2 = \frac{9}{25}$

3) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule rouge

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25} = p(B \cap R)$

4) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.

Au moins une boule blanche signifie une ou deux boules évenement contraire : aucune boule blanche

$1 - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$