Produit scalaire.

Le concept de produit scalaire a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand ***Hermann Grassmann (1809 ; 1877)***

I. Produit scalaire.

☺ Norme d'un vecteur.

Définition : Une unité de longueur étant choisie, la norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est la distance AB.
On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Conséquences :

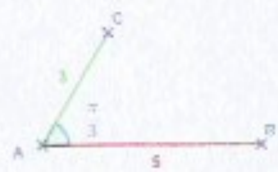
- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ équivaut à ....$AB = a$.......
- Pour tout nombre λ et tout vecteur $\vec{u}$, on a $\|\lambda\,\vec{u}\| =$ ..$\lambda \|\vec{u}\|$.......
- Dans un repère orthonormé si $\vec{u}\,(x\,;y)$, alors ...$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$..........

☺ Définition du produit scalaire.

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A, B et C des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle produit scalaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :

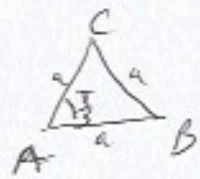
- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Sinon, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire .*



1) *Calcule* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7{,}5$



2) *ABC est un triangle équilatéral de longueur de côté a, Calcule* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, $\vec{u}.\vec{v} =$ ..$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$...... $\cos(0) = 1$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, $\vec{u}.\vec{v} =$ ..$-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$....... $\cos(\pi) = -1$

Propriété : Le produit scalaire est symétrique,
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} =$ ..$\vec{v}.\vec{u}$....................

II. Produit scalaire et orthogonalité.

Définition : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont dits orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} =$ ...0..........................

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ ◆ $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda.\vec{u}.\vec{v}$

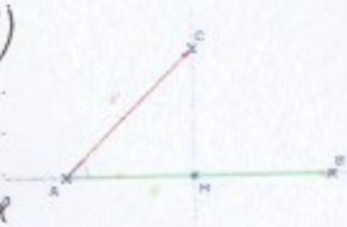
☺ Application :

Propriété : Soit A, B et C trois points (A et B distincts) et H projeté orthogonal de C sur (AB).

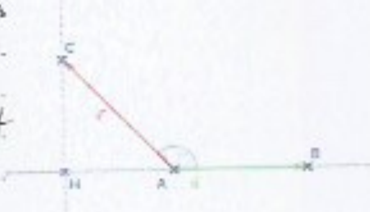
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$
or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0$
et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$
vecteurs colinéaires même direction



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$
or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0$
et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$
vecteurs colinéaires directions contraires



III. Produit scalaire et norme.

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

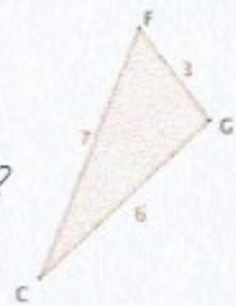
Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

◆ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ ◆ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ ◆ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

◆ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire avec des normes :*



Calcule $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{CF}$
$\|\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CF}\|^2 = \|\overrightarrow{GF}\|^2 = 3^2 = 9$
$\|\overrightarrow{GC}\|^2 = 6^2 = 36$ $\|\overrightarrow{FC}\|^2 = 7^2 = 49$

$\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(9-36-49) = -\frac{76}{2} = -38$
$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{CF} = 38$

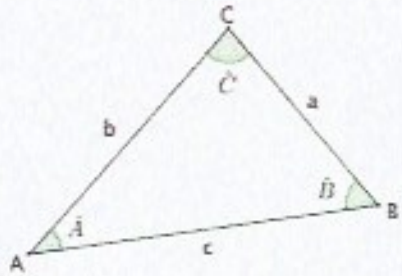
IV. Applications du produit scalaire.

☺ Théorème de la médiane.

Propriété : Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Démonstration :

☺ Théorème d'Al Kashi.



Propriété : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :
On a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

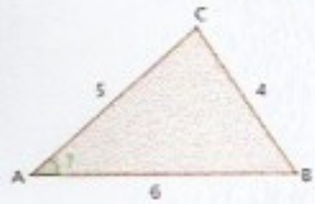
Démonstration exigible :

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos(\hat{A}) = bc\cos(\hat{A})$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2) = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) \Rightarrow a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$

☑*Savoir-faire : Savoir appliquer le théorème d'Al Kashi:*

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



D'après le Th d'Al Kashi on a :

$CB^2 = AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

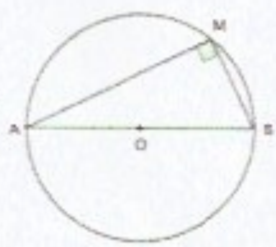
$4^2 = 6^2+5^2-2\times6\times5\times\cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \Rightarrow \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41°$

☺ Caractérisation du cercle.

Propriété : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0$.

Démonstration exigible :



Soit O le centre du cercle.

$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (\vec{MO}+\vec{OA})\cdot(\vec{MO}+\vec{OB}) = 0$ or $\vec{OB} = -\vec{OA}$

donc $(\vec{MO}+\vec{OA})\cdot(\vec{MO}-\vec{OA}) = MO^2 - OA^2$ $\quad \vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0 \Leftrightarrow OA = OM$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$

V. Produit scalaire dans un repère orthonormé.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs. Alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$

☑*Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées :*

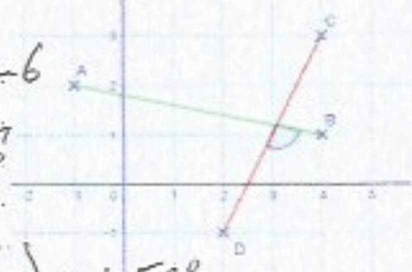
Soit $\vec{u}(5;-4)$ et $\vec{v}(-3;7)$. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times(-3)+(-4)\times7 = -15-28 = -43$

$\vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer un angle à l'aide du produit scalaire :*

Calculer la mesure de l'angle $(\vec{AB},\vec{CD})$ au degré près.



$\vec{AB}(5;-1)$, $\vec{CD}(-2;-4)$ donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 5\times(-2)+(-1)\times(-4) = -6$

de plus $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos(\vec{AB},\vec{AC})$

or $AB = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$ $\quad AC = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$

Donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \sqrt{26}\times\sqrt{20}\times\cos(\vec{AB},\vec{AC}) = -6$

Donc $\cos(\vec{AB},\vec{AC}) = \frac{-6}{\sqrt{26}\times\sqrt{20}}$ donc $(\vec{AB},\vec{AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{26}\times\sqrt{20}}\right) \approx 105{,}3°$