Produit scalaire dans l'espace.

I. Définition.

Définition

Dans l'espace, une unité de longueur étant fixée, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Remarques : deux vecteurs de l'espace sont nécessairement coplanaires, les expressions établies dans le plan sont encore valables dans l'espace.

☺ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u},\vec{v})$.

☺ Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA) alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OH \times OA$

Propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. ☺ $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ ☺ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ ☺ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

☺ $(k.\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k.\vec{v}) = k.\vec{u}.\vec{v}$ ☺ $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Démonstration :

$\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ $\quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'.\vec{k}$ $\quad \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = (x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}).(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'.\vec{k})$

$\vec{u}.\vec{v} = xx'.\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + zz'.\|\vec{k}\|^2$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

☑*Savoir-faire : Savoir calculer le produit scalaire de deux vecteurs.*

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

$\vec{u}.\vec{v} = 2 \times 5 + 3 \times 3 + (-1) \times 2 = 17$

II. Vecteur normal à un plan.

1) Définition et propriétés

Définition

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan *P* lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans *P*.

Remarque : le plan P qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Théorème

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan *P* s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de *P*.

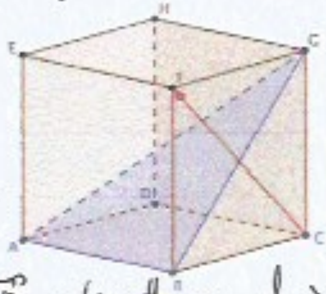
Corollaire

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration (exigible BAC ROC) :

☺ Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan P alors elle est en particulier orthogonale à 2 droites de P.
☺ Démontrons la réciproque : Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) de P sécantes et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.
Soit une droite quelconque (Δ) de P de vecteur directeur $\vec{w}$. Démontrons que (Δ) est orthogonale à (d).
$(\Delta) \in P$ donc $\vec{w}$ peut s'écrire en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$
$\vec{w} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$ donc $\vec{w}.\vec{n} = (x.\vec{u} + y.\vec{v}).\vec{n} = x.\vec{u}.\vec{n} + y.\vec{v}.\vec{n}$
or $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux ($\vec{u}.\vec{n} = 0$) et $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux ($\vec{v}.\vec{n} = 0$)
Donc $\vec{w}.\vec{n} = 0$ donc $\vec{w}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer si un vecteur est normal à un plan :*



ABCDEFGH est un cube. On considère le repère $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BF})$.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).

$A(1;0;0)$ $B(0;0;0)$ $C(0;1;0)$ $F(0;0;1)$
$G(0;1;1)$ donc $\overrightarrow{CF}(0;-1;1)$ $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$
et $\overrightarrow{AB}(-1;0;0)$
$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0\times0 + (-1)\times1 + 1\times1 = 0$ Donc $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{BG}$
$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0\times(-1) + (-1)\times0 + 1\times0 = 0$ Donc $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABG)
Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à (ABG)

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer un vecteur normal à un plan :*

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC)

On a $\overrightarrow{AB}(-2;1;3)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-2;0)$ Soit $\vec{n}(a;b;c)$ normal à (ABC)
alors $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$ donc $\begin{cases}-2a + b + 3c = 0\\ a - 2b = 0\end{cases}$ soit $\begin{cases}c = b\\ a = 2b\end{cases}$

prenons par exemple $b = 1$ alors $\vec{n}(2;1;1)$ est normal au plan (ABC)

2) Equation cartésienne d'un plan

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
☺ Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in R$.
☺ Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in R$, est un plan.

Démonstration (exigible BAC ROC):

☺ Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $M(x;y;z)$ 2 points de P.
alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
$\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
On obtient $ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$ donc de la forme
$ax + by + cz + d = 0$.

③ Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$.

alors $A(-\frac{d}{a};0;0)$ vérifie l'équation donc appartient à (E)
Soit $\vec{n}(a;b;c)$ et $M(x;y;z)$
alors $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b(y-0)+c(z-0) = ax+by+cz+d$
Donc E est l'ensemble des points M / $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ Donc E est le plan passant par A et de vecteur ~~directeur~~ normal $\vec{n}$

Exemple :
Le plan d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ pour vecteur normal $\vec{n}(1;-1;5)$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer une équation cartésienne de plan:*

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(-1,2,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3;-3;1)$.

$\vec{n}$ normal à P donc
P a une équation de la forme $3x-3y+z+d=0$
$A\in P$ donc $3x_A-3y_A+z_A+d=0 \iff 3\times(-1)-3\times2+1+d=-8+d=0$
$\iff d=8$ donc $P:\ 3x-3y+z+8=0$

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan:*

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x-y+3z-2=0$. Soit $A(1;2;-3)$ et $B(-1;2;0)$.
1) Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
2) Déterminer leur point d'intersection.

1°) Le plus simple est de passer par un vecteur normal de P $\vec{n}(2;-1;3)$ est un vecteur normal de (P). (AB) et P sont sécants $\iff \vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.
$\overrightarrow{AB}(-2;0;3)$
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -2\times2+0\times(-1)+3\times3 = 5\neq0$ Donc (AB) et P sont sécants.
2°) une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=-3+3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$
le point d'intersection de (AB) et P vérifie
$2(1-2t)-2+3(-3+3t)=0 \iff t=\frac{11}{5}$
donc $M\left(1-\frac{11}{5}\times2;2;-3+\frac{11}{5}\times3\right)$
$M\left(-\frac{17}{5};2;\frac{18}{5}\right)$

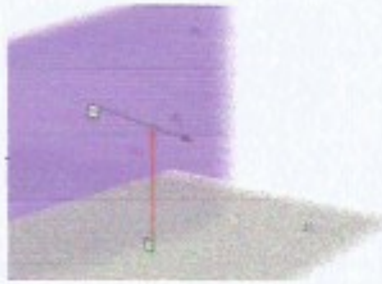
☑*Savoir-faire : Savoir déterminer l'intersection de deux plans:*

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.
1) Démontrer que les plans P et P' sont sécants.
2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

1°) P et P' sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires,
$\vec{n_1}(-1;2;1)$ vecteur normal de P ; $\vec{n_2}(2;-1;3)$ vecteur normal de P'
leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires
2°) Soit $M(x;y;z)\in(d)$ $M\in P$ et P' donc $\begin{cases} -x+2y+z-5=0 \\ 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$
On pose $x=t$
On obtient $\begin{cases} x=t \\ -t+2y+z-5=0 \\ 2t-y+3z-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ z=t-2y+5 \\ y=2t+3(t-2y+5)-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=1-\frac{3}{7}t \\ y=2+\frac{5}{7}t \end{cases}$

c'est donc la droite passant par $A(0;2;1)$ et de vecteur directeur

3) Plans perpendiculaires



Propriété

> Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

- Admis -

☑ *Savoir-faire : Savoir démontrer que deux plans sont perpendiculaires.*

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$. Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

$\vec{n_1}(2;4;4)$ est un vecteur normal de P

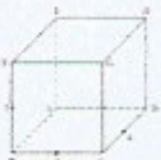
$\vec{n_2}(2;-5;4)$ est un vecteur normal de P'

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 2\times2+4\times(-5)+4\times4 = 0$ donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux

donc P et P' sont perpendiculaires.

☑ ***BAC S. Pondichéry 2016***

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.
2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
   a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.
   b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
4. Démontrer que pour ce point $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$:
   a. N appartient au plan (IJK).
   b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

☑ *BAC S. Liban 2016*

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. **a.** Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

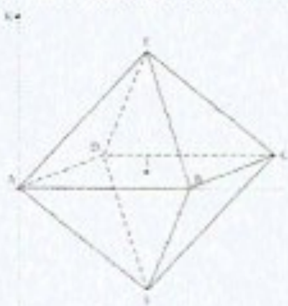
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

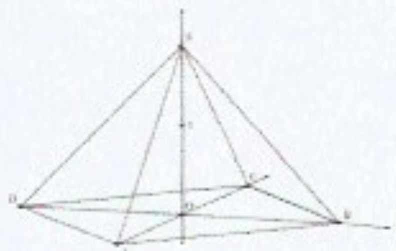
   b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

   c. Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).



☑ *BAC S. Amérique du nord 2016*

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.

On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment [SO].

   a. Déterminer les coordonnées du point K.

   b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

   c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI). Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

   d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

   a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

   b. Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

   c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?